



TESIS-SM 142501

**MAGNETOHIDRODINAMIK YANG TAK TUNAK
PADA LAPISAN BATAS YANG MENGALIR
MELALUI BOLA DI DALAM FLUIDA NANO DI
BAWAH PENGARUH MEDAN MAGNET**

Pingkan Aevi Mariosty Palyama
1215 201 206

DOSEN PEMBIMBING

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

PROGRAM MAGISTER

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2017



THESIS-SM 142501

**UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMICS
NANO FLUID IN BOUNDARY LAYER FLOW
PAST A SPHERE UNDER THE INFLUENCE OF
MAGNETIC FIELD**

Pingkan Aevi Mariosty Palyama
NRP 1215 201 206

SUPERVISORS

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

MASTER'S DEGREE

**MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2017**

**MAGNETOHIDRODINAMIK YANG TAK TUNAK PADA LAPISAN
BATAS YANG MENGALIR MELALUI BOLA DI DALAM FLUIDA
NANO DI BAWAH PENGARUH MEDAN MAGNET**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

PINGKAN AEWI MARIOSTY PALLYAMA

NRP. 1215 201 206

Tanggal Ujian : 17 Juli 2017

Periode Wisuda: September 2017

Disetujui oleh :



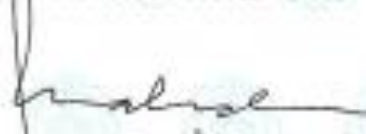
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

(Pembimbing 1)



Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.
NIP. 19830517 200812 1 003

(Pembimbing 2)



Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
NIP. 19620407 198703 1 005

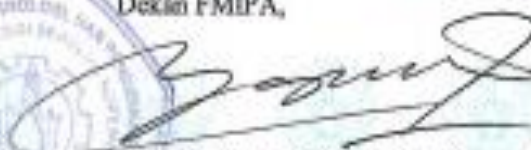
(Penguji)



Dr. Hartiyanto, M.Si.
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)

Dekan FMIPA,



Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

**MAGNETOHIDRODINAMIK YANG TAK TUNAK PADA LAPISAN BATAS
YANG MENGALIR MELALUI BOLA DI DALAM FLUIDA NANO DI
BAWAH PENGARUH MEDAN MAGNET**

Nama Mahasiswa : Pingkan Aevi Mariosty Palyama
NRP : 1215201206
Calon Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

ABSTRAK

Kajian-kajian tentang aliran fluida tentunya sangat menarik untuk dipelajari, mengingat begitu banyaknya manfaat yang dapat diperoleh dan diterapkan dalam berbagai aspek kehidupan. Magnetohidrodinamik (MHD) adalah kajian mengenai pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik yang dipengaruhi oleh medan magnet. Pada usulan penelitian ini akan dibahas mengenai fluida *Non-Newtonian* yaitu fluida nano. Fluida nano adalah campuran fluida cair sebagai fluida dasar dengan partikel nano solid berukuran kecil 1 sampai 100 nanometer (nm). Dalam usulan penelitian ini akan dibahas mengenai permasalahan magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano dibawah pengaruh medan magnet secara teori dengan model matematika dibangun oleh persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Selanjutnya diselesaikan secara numerik dengan Skema Keller-box, yang akan disimulasikan secara numerik untuk menganalisa pengaruhnya terhadap profil kecepatan aliran fluida dan profil temperaturnya. Hasil penyelesaian numerik ini di analisis hubungan antara parameter magnetic (M) , Densitas Fluida Nano ρ_{ND} , Kapasitas Panas Fluida Nano ρC_{ND} , bilangan Prandtl (Pr) , *volume fraction nano fluid* (χ) , dengan profil kecepatan (f') dan profil temperature (s). Hasil simulasi menunjukkan bahwa kurva kecepatan semakin meningkat dengan bertambahnya parameter magnetik, Densitas Fluida Nano, Kapasitas Panas Fluida Nano, dan *Volume fraction nano fluid*. Kurva temperatur semakin menurun dengan bertambahnya parameter magnetic, Densitas Fluida Nano, bilangan Prandtl, Kapasitas Panas Fluida Nano, dan *Volume fraction nano fluid*.

Kata Kunci : Magnetohidrodinamik, Fluida Nano, Lapisan batas, Skema Keller-Box.

UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMICS NANO FLUID IN BOUNDARY LAYER FLOW PASS A SPHERE UNDER THE INFLUENCE OF MAGNETIC FIELD

Name : Pingkan Aevi Mariosty Palyama
NRP : 1215201206
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

ABSTRACT

Research about fluid flow was very interesting because have a lot of advantage and can be applied in many aspect of life. Magnetohidrodinamics (MHD) is a study on the fluid flow which lead electricity influenced by magnetic fields .In this research proposal we will discussed non-newtonian fluid, that is the nano fluid. Nano fluid are a combination of fluid liquid and fluid base with nano particles solid small scale 1 to 100 nanometers (nm). In this research proposal of this study, we will be focus on magnetohydrodynamics that are unsteady on the boundary layer that flows through the sphere in the nano fluid under the influence of a magnetic field theoretically using a mathematical model built in continuity equation and momentum equation .Then it will be solved numerically using Keller-Box scheme in order to numerically simulate to assess its effect on the fluid flow velocity profile and the profile of temperature fluid. The results of numerical simulation will be analyzed for the realtionship between Prandtl number, magnetic parameter, volume fraction nano fluid, towards the velocity profils and the temperature profile. The result of numerical simulations show that the velocity curve increases with increasing Prandtl number, magnetic parameter, volume fraction nano fluid, Density of nano fluid. Temperature curve decreases with increasing magnetic parameter, Prandtl number, volume fraction nano fluid, Density of nano fluid.

Keywords : Magnetohydrodinamic, Nano Fluid, Boundry Layer, Keller-Box Scheme

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas Rahmat dan AnugerahNYA yang telah dilimpahkan kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis dengan judul ” Magnetohidrodinamik Yang Tak Tunak Pada Lapisan Batas Yang Mengalir Melalui Bola Di Dalam Fluida Nano Di Bawah Pengaruh Medan Magnet”

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Dalam penyusunan Tesis ini, penulis banyak mendapat bimbingan, petunjuk dan saran dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.Es., Ph.D., selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.
2. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc, selaku Dekan MIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya dan dosen pembimbing atas segala bantuan serta telah meluangkan waktu dan tenaga untuk memberikan bimbingan, petunjuk, perhatian, arahan, nasehat dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini dengan baik.
3. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T., selaku Kepala Departemen Matematika ITS.
4. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si., selaku Ketua Program Studi Pasca Sarjana Matematika dan sebagai dosen penguji yang telah memberi bimbingan, motivasi serta arahan dalam mengerjakan Tesis..
5. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si., selaku Dosen Wali yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dukungan, kritik, dan saran selama menempuh pendidikan Pasca Sarjana .
6. Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S. Si., M. Si., selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, perhatian, arahan, nasehat, dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini dengan baik.

7. Bapak Dr. Hariyanto, M.Si., dan Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. selaku dosen penguji atas masukan, kritik, dan saran sehingga penulis dapat memperbaiki Tesis ini.
8. Seluruh Dosen, Staff, Karyawan Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan dan juga atas segala bantuan, kemudahan, serta memberikan kelancaran kepada penulis selama pendidikan Pasca Sarjana.
9. Keluarga Tercinta, Papa Laurens Makatipu, Mama Ine Makatipu, Mama Johana Pelmelay, Adik Yezia Makatipu, adik John Makatipu dan yang telah memberikan doa, semangat dan dukungan hingga terselesaikannya studi dan Tesis ini. Serta Seluruh Keluarga Besar Makatipu-Palyama-Pelmelay atas semua doa, dukungan dan motivasi yang tak henti kepada penulis selama menyelesaikan studi.
10. Rury M. Mahupale, Widya A. Nufnu, Legorius. Watlitir, Wilfran Reyk, Petrus Wruin, serta Wilsen Werinussa atas segala doa, semangat, dukungan, nasehat, perhatian, dan motivasi kepada penulis hingga terselesaikannya Tesis ini.
11. Keluarga Besar KA GKI Manyar, Ka Thiam, Grand Ma, Ka Sienny, Ka Hendra, Ka Dody, Ka Elly, semua kakak di KA. Dan Seluruh Bapak Ibu Pengurus Doa Malam GKI Manyar, Bu Emil, Pak Sugeng, Bu siok. Serta teman-teman Koordinator Ibadah Kontemporer, Ka Debby, Gita, Thami, Ondhy. Semua teman-teman pelayan di GKI Manyar, Ka Rocky, Ka Ishak, Ka elin, Billy, Stevi, Randy dan semua yang penulis tidak bisa sebutkan satu demi satu atas segala doa, dukungan, nasehat, perhatian, dan motivasi kepada penulis hingga terselesaikannya Tesis ini.
12. KTB NKRI, Ka Eri, Ka Angy, Ka Hesty, Ka Telme, Ka Dede, Ka Pesta, Ka An, atas segala doa, dukungan, nasehat, perhatian, dan motivasi kepada penulis hingga terselesaikannya studi dan Tesis ini.
13. Tim Penelitian CFD, Nadya A. Rahma, S.Pd., Rizky V. Pratomo, S.Pd., dan M. Satria Dharma Utama atas segala dukungan, kerjasama, dan motivasi dalam hal diskusi materi terkait penelitian hingga terselesaikannya Tesis ini.

14. Yunita N. Afifah, S.Pd., M.Si., Rita A. Ningtyas, S.Si., M.Si., Indira Anggriani, S.Si., M.Si., dan Firdha D. Zainal, S.Si., M.Si. yang memberikan saran dan menjadi rekan diskusi terkait Tesis yang dikerjakan penulis.
15. Teman-teman S2 Matematika ITS angkatan 2015 genap, Mbak Rita, Kak Meidy, Habib, Mas Lalu, Rizky, Mbak Meylista, Mbak Nabila, Yessy, Ifah, Nadnad, Vimala, yang telah menemani, memberikan dukungan dan segala bantuan selama perkuliahan juga Teman-teman S2 Matematika ITS angkatan 2015 ganjil, Mbak Ida, Mbak Echa, Mas Ridho, Mbak Nurul, Ka Trifena, Mas Haqqul, Mbak Trisna dan Teman-teman S2 Matematika ITS angkatan 2016, Ravy, Adit, Chiby, Mas Ikhwan, Mas Lutfi, Hakam, Heri, semua yang penulis tidak dapat sebutkan satu demi satu, atas segala bantuan, motivasi, persahabatan dan kenangan selama penulis menyelesaikan Tesis dan menempuh pendidikan di Pascasarjana Matematika ITS.
16. Pihak-pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang telah banyak membantu dalam menyelesaikan skripsi ini

Semoga Tesis ini dapat bermanfaat, penulis menyadari bahwa tulisan ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak, sehingga penelitian selanjutnya diharapkan bisa lebih baik dan semoga laporan Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, bagi kemajuan dan perkembangan ilmu pengetahuan dan dapat berkontribusi terhadap kemajuan ITS, bangsa dan Negara.

Surabaya, 28 Juli 2017

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN.....	i
ABSTRAK.....	iii
ABSTRACT.....	v
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR SIMBOL.....	xv
BAB I. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Penelitian.....	3
1.4 Asumsi.....	3
1.5 Tujuan Penelitian	3
1.6 Manfaat Penelitian.....	4
BAB II. KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Penelitian Terdahulu.....	5
2.2 Fluida.....	6
2.3 Aliran Fluida Berdasarkan Waktu.....	8
2.4 Aliran Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>).....	8
2.5 MagnetohidrodinamikMHD	9
2.6 Pemodelan Matematika.....	11
2.7 Skema Keller-Box.....	11
BAB III. METODE PENELITIAN	13
3.1 Tahapan Penelitian	13
3.2 Tempat Penelitian	14
BAB IV MODEL MATEMATIKA	15
4.1 Persamaan Pembangun.....	15
4.2 Model Matematika Dimensional.....	25
4.3 Model Matematika Non-Dimensional.....	26

	4.4 Penyederhanaan Model Matematika Non-Dimensional pada Lapisan Batas.....	27
	4.5 Fungsi Alir.....	28
	4.6 Persamaan Similaritas.....	29
BAB V	PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA	33
	5.1 Penyelesaian Numerik Model	33
	5.2 Hasil Simulasi Numerik	45
BAB VI	KESIMPULAN DAN SARAN	51
	6.1 Kesimpulan.....	51
	6.2 Saran.....	52

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.	Skema Keller-box.....	11
Gambar 4.1	Model Fisis Fluida yang Melewati bola Pejal.....	15
Gambar 4.2	Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Atur.....	17
Gambar 4.3	Gaya Permukaan dalam arah $-x$ yang bekerja pada Elemen Fluida.....	19
Gambar 4.4	Komponen <i>Heat Flux</i> pada Volume Kendali.....	23
Gambar 5.1	Skema Beda Hingga.....	34
Gambar 5.2	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik	44
Gambar 5.3	Profil Temperatur dengan variasi Parameter Magnetik.....	45
Gambar 5.4	Profil Kecepatan dengan Variasi Nano partikel Volume Fraction.....	46
Gambar 5.5	Profil Temperatur dengan Variasi Nano partikel Volume Fraction.....	46
Gambar 5.6	Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl....	47
Gambar 5.7	Profil Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl...	48
Gambar 5.8	Profil Kecepatan dengan Variasi Densitas Fluida Nano.....	49
Gambar 5.9	Profil Temperatur dengan Variasi Densitas Fluida Nano.....	49
Gambar 5.10	Profil Kecepatan dengan Variasi Kapasitas Panas Fluida Nano.....	50
Gambar 5.11	Profil Temperatur dengan Variasi Kapasitas Panas Fluida Nano.....	50

DAFTAR SIMBOL

τ	: Tegangan geser pada fluida.
μ	: Viskositas Fluida.
u	: Komponen kecepatan fluida pada sumbu – x .
k	: Konduktivitas panas fluida
c_p	: Panas jenis pada tekanan konstan
t	: Waktu.
U_∞	: Kecepatan fluida pada aliran bebas.
a	: Panjang karakteristik
V	: Viskositas kinematik
v	: Komponen kecepatan fluida pada sumbu – y .
ρ	: Densitas fluida
p	: Tekanan.
J	: Kerapatan arus.
B	: Medan magnet
\hat{n}	: Vektor normal terhadap elemen dA
E	: Medan listrik
e	: Energi total per satuan massa setiap partikel sistem
\tilde{u}	: Energi per satuan massa
σ	: Konduktivitas listrik

BAB I

PENDAHULUAN

1.1.Latar Belakang

Aliran magnetohidrodinamika adalah penelitian yang penting dalam kaitannya dengan aplikasi bidang teknik dan industri. Contohnya ialah pada proses pendinginan reactor , pasokan gas alam, dan pemipaan zat-zat kimia pada pabrik. Selain itu pada pembangkit tenaga listrik yang menggunakan fluida cair dan gas serta masih banyak lagi yang lainnya. Pada keadaan ini, hal yang utama adalah hubungan timbal-balik antara kecepatan aliran dan medan elektromagnet, yaitu aliran fluida yang menyebabkan adanya medan magnet dan medan magnet yang menyebabkan adanya aliran fluida. (Widodo dkk, 2015).

Lapisan batas atau *Boundry Layer* adalah lapisan tipis pada permukaan padat atau *solid surface* yang terbatas pada daerah yang sangat sempit dekat dengan permukaan kontur dimana dipengaruhi oleh adanya viskositas maupun gaya inersia benda. Gaya inersia benda ini menunjukkan gaya yang diberikan oleh zat cair apapun berdasarkan keadaan geraknya. Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia dengan viskositasnya secara garis besar terdiri dari tiga jenis aliran, yakni aliran laminar, aliran transisi dan aliran turbulen(Widodo,2012).

Pada permasalahan yang nyata, berbagai macam fluida yang terjadi pada berbagai macam keadaan tidak selalu dapat dinyatakan sebagai fluida Newtonian (Widodo, 2012; Widodo, 2013). Beberapa diantaranya kontradiksi dengan karakteristik fluida Newtonian dan jenis fluida ini biasa dikenal dengan Fluida Non-Newtonian. Terdapat beberapa jenis fluida yang termasuk dalam kategori ini, misalnya fluida nano dan fluida mikrokutub.

Fluida yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah fluida nano. Fluida nano merupakan larutan yang mengandung partikel nano dengan ukuran 1-100 nm dalam fluida dasar. Dimana fluida nano merupakan campuran fluida kerja, dengan tujuan yaitu penambahan partikel nano ini dapat menaikkan temperature, menaikkan luas permukaan perpindahan panas yang terjadi dan juga menaikkan koefisien perpindahan panas.

Banyak kasus pada magnetohidrodinamik pada lapisan batas diamati sebagai kasus dalam keadaan tunak atau *steady-state*. Padahal pada lapisan batas, perubahan waktu amat berperan signifikan. Sementara itu, berbicara tentang aliran fluida yang melalui suatu bola padat, yang melibatkan gaya tarikan yang timbul disekitarnya, kejadian ini dipahami melalui identifikasi pemisahan aliran dan hal tersebut terjadi untuk aliran tak tunak. Mohammad dkk (2012) telah mengamati separasi aliran dalam dimensi dua dan tunak pada lapisan batas yang mengalir melewati sebuah bola dalam fluida tanpa memperhatikan adanya medan magnet.

Pada penelitian Yunita (2016) tentang pengaruh magnetohidrodinamik pada fluida nano yang melewati bola teriris di konstruksi beberapa model matematika dari fenomena tersebut yaitu Persamaan kontinuitas, Persamaan Momentum dan Persamaan Energi.

Pada usulan penelitian ini, pengaruh adanya medan magnet dilibatkan. Dalam usulan penelitian ini akan dikaji dan diteliti pengaruh medan magnet pada aliran fluida magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano secara teori dengan membuat model matematikanya dan selanjutnya disimulasikan secara numerik untuk mengkaji pengaruhnya terhadap profil kecepatan aliran fluida, *skin friction*, temperature dan profil mikrorotasi partikelnya. Hal ini adalah sesuatu yang belum pernah dilakukan oleh peneliti-peneliti lain dan menghasilkan penyelesaian baru.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang di atas, maka dapat dibuat rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano di bawah pengaruh medan magnet?
2. Bagaimana penyelesaian model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano di bawah pengaruh medan magnet menggunakan metode beda hingga dengan skema Keller-Box?

3. Bagaimana pengaruh parameter bilangan Prandtl, parameter magnetic, *volume fraction nano fluid*, densitas fluida nano dan kapasitas fluida nano terhadap profil kecepatan dan temperatur ?

1.3. Batasan Penelitian

Permasalahan-permasalahan yang dikaji dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut :

1. Geometri benda pada penelitian ini yang diamati adalah bola pejal bermagnet.
2. Jenis Fluida yang diamati adalah fluida nano dalam bentuk cair
3. Partikel Nano yang digunakan pada simulasi adalah *Cu* dan *Al2O3*
4. Penelitian ini difokuskan pada aliran lapisan batas yang terletak disekitar titik stagnasi terendah $x = 0^\circ$

1.4. Asumsi

1. Aliran dalam kondisi tak tunak (*Unsteady*), Aliran fluidanya *incompressible* karena tidak dibawah pengaruh tekanan, laminar, dua-dimensi yang mengalir secara seragam.
2. Fluida diinduksi oleh medan magnet dari bola.
3. Pada aliran fluida tidak terdapat tegangan listrik.
4. Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan pembangun model digunakan metode Keller-box.

1.5. Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah yang dibuat, maka tujuan dilaksanakannya penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membangun model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano di bawah pengaruh medan magnet.
2. Merancang solusi model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano di bawah pengaruh medan magnet.
3. Menganalisa pengaruh parameter material nano dan adanya magnetohidrodinamik pada karakteristik aliran, seperti *skin friction*, densitas, volume fraction, profil kecepatan, dan temperatur.

1.6. Manfaat Penelitian

Dengan dilakukannya penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi :

1. Sebagai salah satu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika dibidang teknologi dan industri.
2. Sebagai salah satu bentuk kontribusi mengenai penerapan metode beda hingga khususnya metode beda hingga skema Keller-box yang diterapkan pada model matematika aliran tak tunak fluida nano yang melewati bola.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1. Penelitian Terdahulu

Beberapa penelitian terdahulu yang relevan dengan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Ramadhan (2012) : Studi pustaka untuk pengayaan didalam riset aplikasi fluida nano di bidang teknik di Indonesia. Berdasarkan data-data riset terdahulu mengenai berbagai aspek riset, yaitu dimana dimulainya riset mengenai karakteristik dan pembuatan fluida nano hingga aplikasi nano fluida di bidang teknik.
2. Mohammad (2014) : Pada penelitian ini diamati pengaruh adanya medan magnet terhadap profil kecepatan, profil temperature dan *skin friction*. Dijelaskan bahwa nilai parameter magnetic jika ditingkatkan atau diperbesar maka dapat meningkatkan ketebalan dari lapisan batas. Dengan meningkatnya parameter magnetic didapatkan bahwa kecepatan yang dihasilkan semakin meningkat, dan temperature semakin menurun.
3. Alkasasbeh (2015) : Mengenai banyak permasalahan salah satunya yaitu aliran fluida nano konveksi campuran pada lapisan batas yang melewati bola dalam keadaan *steady*. Pada penelitian tersebut diamati pengaruh *nano partikel volume fraction* terhadap temperatur dan kecepatan. Pada penelitian tersebut juga dijelaskan bahwa ketika nilai *nano partikel volume fraction* ditingkatkan maka nilai parameter conjugate meningkat, temperature meningkat tetapi kecepatan menurun.
4. Widodo dkk (2016) : melakukan penelitian yang berjudul *Viscoelastic fluid flow pass a porous circular cylinder when the magnetic field include*. Menjelaskan tentang pengaruh parameter magnetic (M) terhadap kecepatan aliran fluida. Semakin besar nilai M maka semakin besar kecepatan fluida.

2.2. Fluida

Terdapat tiga fase zat yang tersebar di alam, yaitu fase padat, gas, dan cair. Karena fase gas dan cair tidak dapat dipertahankan bentuk yang tetap, maka keduanya mempunyai kemampuan untuk mengalir, dengan demikian keduanya disebut dengan fluida. Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun tegangan geser tersebut (Widodo, 2012). Tegangan geser adalah perbandingan gaya geser dengan luas permukaan sedangkan gaya geser adalah komponen gaya yang menyinggung permukaan. Secara matematis ditulis dalam bentuk:

$$\tau = F_{geser}/A$$

dengan

τ = tegangan geser (N/m^2)

F_{geser} = Gaya geser (N)

A = Luas permukaan m^2

Perbedaan zat cair dan gas adalah zat cair merupakan zat yang tak mampu mampat (*incompressible*), sedangkan gas merupakan zat yang mampu mampat (*compressible*). Kemampatan adalah perubahan (pengecilan) volume karena adanya perubahan tekanan

2.2.1 Fluida Nano

Fluida Non Newton adalah fluida yang akan mengalami perubahan kekentalan ketika terjadi gaya pada fluida tersebut. Hal ini membuat fluida non newton memiliki tingkat kekentalan atau viskositas yang tidak tetap. Salah satu contoh dari fluida non newton adalah fluida mikrokutub. Fluida yang akan digunakan pada penelitian ini adalah fluida nano yang termasuk dalam fluida *Newontian*. Fluida nano merupakan larutan yang mengandung partikel nano dengan ukuran 1-100 nm dalam fluida dasar (Ramadhan, 2012). Secara teoritis, fluida nano memiliki perbedaan yang lebih besar dibandingkan dibandingkan dari fluida kerja biasa seperti air. Dimana fluida nano merupakan campuran fluida kerja, yaitu penambahan partikel nano ini dapat menaikkan temperature, menaikkan luas permukaan perpindahan panas yang terjadi, dan juga koefisien perpindahan panas.

Secara *physical case* perlu diperhatikan densitas dari partikel nano untuk mendapatkan perbandingan campuran yang tepat. Pada penelitian sebelumnya digunakan presentase volum untuk menentukan konsentrasi campuran. Volume partikel ditentukan dengan menggunakan densitas sebenarnya dari partikel nano dan massanya dengan mengabaikan massa udara yang terperangkap didalamnya.

Sifat-Sifat Fluida Nano

1. Densitas Fluida Nano

Densitas adalah kerapatan atau massa jenis suatu fluida dan dapat diidentifikasi sebagai massa suatu zat per satuan volume:

$$\rho_{nf} = (1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s$$

Dimana ρ_{nf} adalah densitas fluida nano (kg/m^3), *nanopartikel volume fraction* adalah χ , dan ρ_f adalah densitas fluida dasar (kg/m^3), ρ_s adalah densitas partikel nano (kg/m^3) (Alkasasbech,2015).

2. Viskositas

Pada penelitian ini, viskositas yang dipakai adalah viskositas dinamik yang didapatkan dari perhitungan prediksi menggunakan persamaan dari *Brinkman equation* yaitu:

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \chi)^{2.5}}$$

dimana μ_{nf} adalah viskositas fluida nano, viskositas fluida dasar adalah μ_f , dan *nanopartikel volume fraction* adalah χ

3. Kalor spesifik Fluida Nano

Definisi kalor spesifik fluida nano yaitu jumlah energy yang dibutuhkan untuk menaikkan satu satuan massa zat pada suhu satu derajat celcius, kalor spesifik fluida nano pada tekanan konstan (cp,nf) dapat diestimasi berdasarkan korelasi dan Xuan dan Roetzel (2000) sebagai berikut:

$$cp,nf = ((1 - \phi)\phi_{bf}c_{(\rho bf)} + \phi\rho_p c_{(\rho b)})/\rho_{nf}$$

Dimana cp,nf , $c_{(\rho bf)}$, $c_{(\rho b)}$ berturut-turut adalah kalor spesifik fluida nano, kalor spesifik fluida dasar, dan kalor spesifik partikel ($kJ /kg. K$),

fraksi volume dari partikel adalah ϕ , ϕ_{bf} , ρ_p , ρ_{nf} berturut-turut adalah densitas dari fluida dasar, partikel nano, serta fluida nano kg/m^3)

4. Konduktifitas termal

Konduktifitas termal adalah suatu besaran intensif bahan yang menunjukkan kemampuannya untuk mengantarkan panas. Didalam fluida nano dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{(k_s + 2k_f) - 2x(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + x(k_f - k_s)}$$

2.3. Aliran Fluida Berdasarkan Waktu

Aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap perubahan waktu pada umumnya dibagi menjadi dua, yaitu : (Widodo, 2012)

1. Aliran Tunak (*Steady State*) berarti kecepatan aliran fluida tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Aliran Tak Tunak (*Unsteady State*) berarti kecepatan aliran fluida dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tak tunak berlaku :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

2.4. Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Lapisan batas adalah suatu lapisan yang terbentuk di sekitar penampang suatu benda yang dilalui fluida akibat faktor gesekan dan viskositas fluida. Teori lapisan batas dikemukakan oleh Ludwig Prandtl seorang ahli aerodinamika asal Jerman pada tahun 1904. Sebelumnya pada tahun 1755, seorang ahli hidrodinamika bernama Leonhard Euler mengemukakan aliran tanpa gesekan dan kemudian dinyatakan ke dalam persamaan Euler. Dengan banyaknya kontradiksi terhadap hasil eksperimennya, persamaan Euler dijelaskan dan dikaji lebih rinci untuk kondisi aliran bergesekan oleh Navier pada tahun 1827 dan oleh Stokes pada tahun 1845 yang sekarang dikenal dengan persamaan Navier-Stokes.

Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia beserta viskositasnya pada usulan penelitian ini adalah jenis aliran laminar.

(Widodo.2015). Aliran laminar adalah aliran yang partikel-partikelnya bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi ketika bilangan Reynolds fluida kurang dari 500 ($Re < 500$) atau pada saat fluida bergerak perlahan dengan kecepatan yang kecil dan atau fluida memiliki tingkat kekentalan atau viskositas yang besar.

Bilangan Reynold untuk suatu aliran fluida dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut :

$$Re = \frac{U_{\infty} a}{V}$$

Re = Bilangan Reynolds

U_{∞} = Kecepatan pada aliran bebas (m/s)

a = Panjang karakteristik

V = Viskositas kinematic

2.5. Magnetohidrodinamik (MHD)

Istilah *magnetohydrodynamic* terdiri dari kata “*magneto*” yang berarti “*medan magnetik*”, “*hydro*” yang berarti “*cairan/fluida*”, dan “*dynamic*” yang berarti “*pergerakan*”. Magnetohydrodynamic (MHD) dapat diartikan sebagai suatu hantaran dan pergerakan suatu fluida secara elektrik di dalam suatu medan magnetik. Fluida yang dimaksud dapat berupa plasma, logam cair, atau air garam.

Bentuk persamaan MHD yaitu persamaan-persamaan fluida yang meliputi persamaan kontinuitas, persamaan energi, dan untuk persamaan pada medan magnetnya menggunakan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah persamaan-persamaan dasar untuk membuat persamaan MHD yang ideal :

1. Persamaan momentum :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

2. Persamaan konservasi massa :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

3. Persamaan konservasi energi :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

4. Persamaan Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

dimana :

\mathbf{B} = Medan magnet (0,0, B)

\mathbf{E} = Medan listrik (0, 0, E)

\mathbf{V} = Kecepatan massa plasma

\mathbf{J} = Kerapatan arus

ρ = Massa jenis

p = Tekanan plasma

t = Waktu

μ_0 = Permeabilitas ruang hampa ($4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$)

Pada persamaan MHD di atas, persamaan $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ pada persamaan Maxwell tidak digunakan. Persamaan $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ hanya digunakan saat kondisi awal saja. Selain itu, untuk kecepatan rendah, perpindahan arusnya bisa diabaikan atau dianggap nol (Arber. 2013). Sehingga persamaan umum dari MHD menjadi :

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

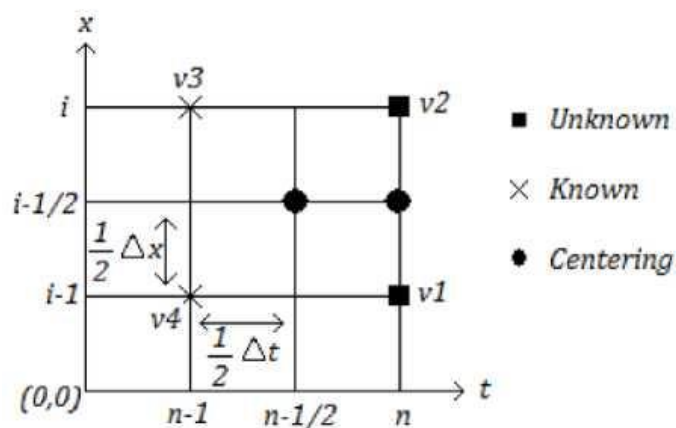
2.6. Pemodelan Matematika

Untuk membangun model matematika aliran magnetohidrodinamik tak tunak fluida nano yang melewati bola bermagnet didasarkan pada penurunan hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I termodinamika. Yang penyederhanaan persamaan pembangunnya dengan menggunakan teori lapisan batas sehingga diperoleh persamaan pembangun yang berdimensi dari aliran magnetohidrodinamik tak tunak fluida nano yang melewati bola bermagnet.

- Persamaan Kontinuitas
- Persamaan Momentum
- Persamaan Energi

2.7. Skema Keller-Box

Metode Keller-Box adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Skema ini merupakan bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang maupun waktu yang mana step size untuk waktu dan ruang tidak harus sama. Hal ini membuat penyelesaian persamaan differensial parsial parabolic lebih efisien dan tepat. Penerapan metode Keller-Box ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan diferensial orde satu (Al-Shibani dkk, 2012).



Gambar 2.1 Skema Keller-Box (Al-Shibani dkk, 2012)

BAB III

METODE PENELITIAN

Secara detail, desain dan metode penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut:

3.1. Tahapan Penelitian

Tahapan-tahapan yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Tahap Persiapan

Pada tahap ini akan dikumpulkan beberapa referensi yang mendukung penelitian baik dari buku maupun jurnal ilmiah.

2. Tahap Pemodelan

Pada tahap ini akan dilakukan dalam beberapa langkah:

- i. Penurunan persamaan konversi massa dan hukum-hukum Fisika yang berkaitan dengan permasalahan.
- ii. Persamaan kemudian dirubah secara berturut-turut menjadi model dimensional, model non-dimensional, fungsi aliran dan persamaan similaritas.
- iii. Menentukan kondisi batas.

3. Tahap penyelesaian Model

Persamaan similaritas yang telah diperoleh diselesaikan dengan metode numeric Keller-Box. Langkah-langkah sebagai berikut:

- i. Persamaan similaritas yang dibentuk dirubah menjadi persamaan ordo pertama.
- ii. Persamaan ordo pertama yang terbentuk didiskritisasi dengan metode beda hingga pusat.
- iii. Persamaan yang didiskritisasi dilinierisasi dengan menggunakan metode newton dan dibentuk dalam matriks vector.
- iv. Hasil linierisasi diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal

4. Tahap Simulasi

Program yang telah dibuat selanjutnya dapat digunakan untuk melakukan simulasi model dalam permasalahan magnetohidrodinamik yang tak tunak pada

lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano dibawah pengaruh medan magnet. Persamaan similaritas yang telah diselesaikan diterapkan dalam pemograman. Beberapa langkahnya sebagai berikut:

1. Penyusunan program dilakukan dengan memperhatikan nilai awal, formula-formula hasil diskritisasi, dan tampilan hasil.
2. Program yang telah disusun akan dijalankan. Jika program dapat dijalankan dengan baik maka dapat melanjutkan ke tahap penelitian selanjutnya. Tetapi jika tidak maka diperlukan merevisi program.

5. Tahap Finalisasi

Tahap ini akan berisi kegiatan penarikan kesimpulan dari hasil-hasil penelitian.

6. Diseminasi Hasil Penelitian

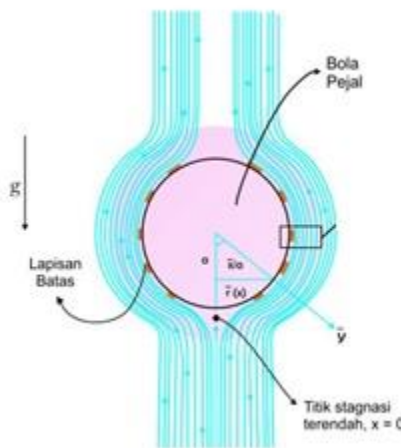
3.2.Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi Sistem, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

BAB IV

MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai proses pembentukan persamaan pembangun dimensional, pengubahan menjadi persamaan non-dimensional dan transformasi ke persamaan similaritas yang merupakan bentuk model matematika dari magnetohidrodinamik (MHD) yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano di bawah pengaruh medan magnet.



Gambar 4.1 Model Fisis Fluida yang melewati bola pejal

Pada penelitian ini melibatkan fluida nano yang akan diperhatikan parameter fluida nano seperti densitas fluida, spesifik panas dan konduktivitas panas. Fluida yang mengalir terinduksi medan magnet saat melewati bola yang bermagnet.

4.1. Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun yang digunakan untuk membangun model didapatkan dari penurunan hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I termodinamika.

4.1.1. Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas dibangun dari hukum kekekalan massa. Konsep dari hukum kekekalan massa yaitu laju perubahan massa terhadap waktu pada sebuah sistem sama dengan nol atau jumlahan dari massa pada suatu sistem adalah konstan, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{D M_{sys}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

dimana $\frac{D ()}{Dt}$ adalah turunan material sedangkan M_{sys} adalah massa sistem yang sama dengan jumlah dari semua perkalian antara densitas fluida dengan volume fluida pada system tersebut yang dapat dinyatakan dengan :

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho_{fn} dV \quad (4.2)$$

dengan ρ_{fn} adalah densitas fluida nano dan V adalah volume fluida. Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.2) ke Persamaan (4.1) didapatkan

$$\frac{D M_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho_{fn} dV = 0 \quad (4.3)$$

Dengan menggunakan teorema *Reynolds Transport*, laju dari perubahan massa terhadap waktu pada sebuah sistem dapat dituliskan :

$$\frac{D M_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho_{fn} dV + \int_{CS} \rho_{fn} \mathbf{V} \cdot \hat{n} dS \quad (4.4)$$

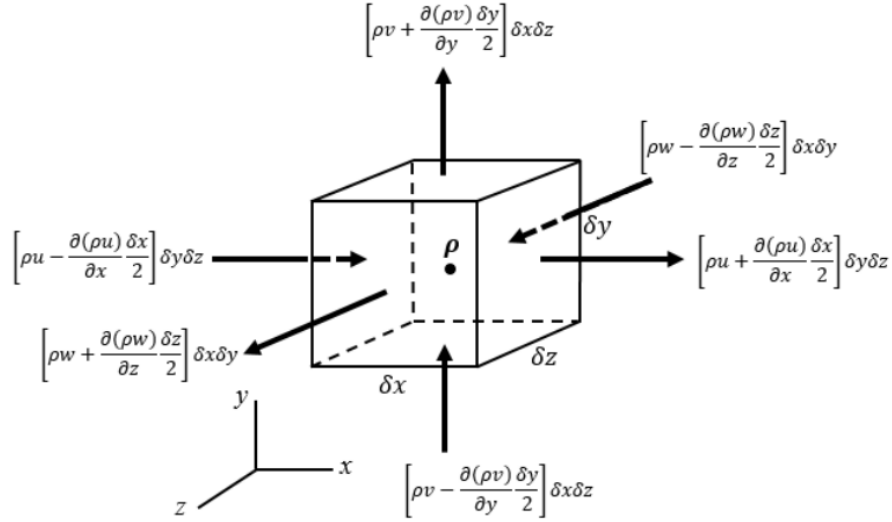
Sehingga dengan mensubstitusikan Persamaan (4.4) ke Persamaan (4.3) didapatkan:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho_{fn} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho_{fn} dV + \int_{CS} \rho_{fn} \mathbf{V} \cdot \hat{n} dS \quad (4.5)$$

dimana $\mathbf{V} \cdot \hat{n} dS$ merupakan perkalian dari komponen kecepatan fluida \mathbf{V} dan vektor normal terhadap bidang diferensial dS , yang merupakan laju dari aliran volume yang melalui dS dan $\rho_{fn} \mathbf{V} \cdot \hat{n} dS$ merupakan laju aliran massa melalui dS . Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.4) ke Persamaan (4.1) diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho_{fn} dV + \int_{CS} \rho_{fn} \mathbf{V} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (4.6)$$

Dengan menggunakan pendekatan *Control volume* untuk menggambarkan elemen-elemen kecil pada sistem, maka dapat dikonstruksi persamaan kontinuitas sebagai berikut :



Gambar 4.2 Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Atur

Sesuai Hukum Konservasi Massa :

laju perubahan massa dalam sel = fluks massa ke dalam fluks

Berikut adalah kontrol volume yang digunakan untuk menggambarkan elemen kecil pada sistem, dengan pusat elemen terdapat ρ_{fn} yang merupakan densitas fluida dan komponen kecepatan \mathbf{V} pada arah u , v dan w , maka laju perubahan massa elemen kecil terhadap waktu terhadap sumbu x , y , dan z dapat digambarkan seperti pada gambar.

Sehingga jumlah aliran massa yang keluar para arah $-x$ dapat didefinisikan sebagai

$$\left[\rho_{fn} u + \frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \cdot \delta z - \left[\rho_{fn} u - \frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \cdot \delta z = \frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \quad (4.7)$$

Dan aliran massa yang keluar pada arah $-y$ sebagai berikut:

$$\left[\rho_{fn} v + \frac{\partial(\rho_{fn} v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \cdot \delta z - \left[\rho_{fn} v - \frac{\partial(\rho_{fn} v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \cdot \delta z = \frac{\partial(\rho_{fn} v)}{\partial y} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \quad (4.8)$$

Juga aliran massa yang keluar pada arah $-z$ adalah:

$$\left[\rho_{fn} w + \frac{\partial(\rho_{fn} w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \cdot \delta y - \left[\rho_{fn} w - \frac{\partial(\rho_{fn} w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \cdot \delta y = \frac{\partial(\rho_{fn} w)}{\partial z} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \quad (4.9)$$

Sehingga total aliran dapat ditulis sebagai berikut:

$$\left[\frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{fn} v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{fn} w)}{\partial z} \right] \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z = 0 \quad (4.10)$$

Jadi laju terhadap perubahan waktu dari massa sistem yaitu:

$$\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z + \left[\frac{\partial(\rho_{fn} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{fn} v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{fn} w)}{\partial z} \right] \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z = 0 \quad (4.11)$$

Kedua ruas dibagi dengan $\delta x \delta y \delta z$ didapatkan:

$$\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{fn}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{fn}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{fn}w)}{\partial z} = 0 \quad (4.12)$$

Pada penelitian ini aliran fluida yang dianalisa adalah aliran fluida pada bidang xoy , sehingga persamaannya menjadi:

$$\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{fn}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{fn}v)}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

Persamaan (4.13) dapat pula dituliskan dalam bentuk notasi vektor sebagai berikut :

$$\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{fn} \mathbf{V}) = 0 \quad (4.14)$$

Pada penelitian ini diasumsikan fluida bersifat *incompressible*, yaitu densitas fluida sangat kecil dan tidak memberikan pengaruh yang signifikan ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), sehingga:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.15)$$

Karena pada penelitian ini digunakan bola pejal sehingga persamaan kontinuitasnya dipengaruhi juga oleh jari-jari bola, maka persamaan kontinuitas dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano di bawah pengaruh medan magnet adalah :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{r} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{r} \bar{v}) \right] = 0 \quad (4.16)$$

4.1.2. Persamaan Momentum

Karena pada suatu fluida bergerak akan terjadi suatu momentum. Prinsip dari persamaan momentum adalah hukum Newton II. Karena momentum adalah massa dikalikan dengan kecepatan, maka momentum dari sebuah partikel kecil $\rho_{fn} dx$ adalah $\rho_{fn} \mathbf{V} dx$, sehingga momentum dari seluruh sistem adalah $\int_{sys} \rho_{fn} \mathbf{V} dx$

Secara matematis Hukum II Newton dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho_{fn} \mathbf{V} dx = \sum F \quad (4.17)$$

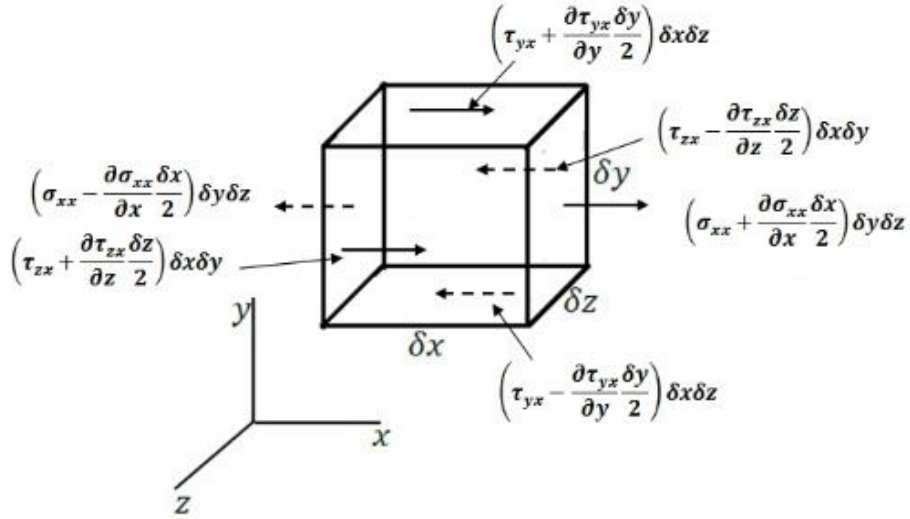
dengan menggunakan teorema Reynolds *Transport*, laju dari perubahan momentum terhadap waktu adalah:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\omega} \rho_{fn} \mathbf{V} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho_{fn} \mathbf{V} dx + \int_{CS} \rho_{fn} \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \hat{n}) dS \quad (4.18)$$

Dengan $\sum F$ menunjukkan komponen gaya-gaya yang bekerja pada permukaan bola. Komponen gaya-gaya tersebut adalah gaya permukaan dan gaya magnet. Dapat dituliskan sebagai :

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = \sum F \quad (4.19)$$

Dengan menggunakan pendekatan *Control volume* maka dapat dikonstruksi persamaan momentum linier sebagai berikut :



Gambar 4.3 Gaya Permukaan yang bekerja pada Elemen Fluida

Dimana $\sum F$ merupakan komponen gaya-gaya yang bekerja. Komponen gaya-gaya tersebut adalah gaya permukaan \mathbf{F}_s dan gaya magnet \mathbf{F}_M . Gaya-gaya permukaan yang bekerja pada sebuah elemen kubus kecil dari sebuah fluida dalam bentuk tegangan-tegangan yang bekerja pada permukaan seperti pada gambar 4.3, terdapat tegangan normal (σ) dan tegangan geser (τ) yang dapat diperoleh dari *Control Surface*. Sehingga dengan menjumlahkan seluruh gaya pada arah $-x$ didapatkan:

$$F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.20)$$

dan gaya dalam arah $-y$

$$F_{sy} = \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.21)$$

Resultan Gaya Permukaannya sebagai berikut:

$$\mathbf{F}_s = F_{sx} \mathbf{i} + F_{sy} \mathbf{j} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{F}_s = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \hat{j} \quad (4.23)$$

Untuk fluida Nano yang tak mampu mampat (*incompressible*) sehingga tegangan-tegangannya sebanding dengan laju deformasi dapat dinyatakan:

a. Tegangan normal

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu_{fn} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.24)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu_{fn} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.25)$$

b. Tegangan geser

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu_{fn} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.26)$$

Dengan mensubsitusikan persamaan (4.24) – (4.26) pada persamaan (4.23) diperoleh

$$\mathbf{F}_s = \left(\frac{-\partial p}{\partial x} + 2\mu_{fn} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) \mathbf{i} + \left(\frac{-\partial p}{\partial y} + 2\mu_{fn} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right) \mathbf{j} \quad (4.27)$$

Atau dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{F}_s = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} \quad (4.28)$$

Ada gaya yang turut mempengaruhi yaitu gaya magnetik yang biasa dikenal dengan nama Gaya Lorentz dan disimbolkan sebagai :

$$\mathbf{F}_M = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.29)$$

Dimana \mathbf{J} adalah kerapatan arus listrik dan \mathbf{B} adalah total medan magnet yang terjadi dalam sistem. Sedangkan menurut hukum Ohm, bahwa kerapatan arus listrik diberikan :

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (4.30)$$

Dimana σ adalah konduktivitas listrik. Karena $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{B}_0$, dimana \mathbf{B} adalah medan magnet total , \mathbf{B}_0 adalah medan magnet dari bola yang mengandung magnet, dan \mathbf{b} adalah besarnya medan magnet dari fluida yang

terinduksi oleh bola bermagnet. Salah satu sifat konduktor adalah tidak ada medan listrik di dalam konduktor sehingga ($E=0$).

Dengan mensubstitusi persamaan (4.30) ke persamaan (4.29), maka diperoleh :

$$\mathbf{F}_M = \sigma (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.31)$$

Salah satu sifat konduktor adalah tidak ada medan listrik di dalam konduktor sehingga ($E=0$). Pada penelitian ini tidak ada tegangan listrik pada aliran fluida, sehingga medan listrik (E) sama dengan nol. Persamaan (4.31) akan menjadi :

$$\mathbf{F}_M = \{ \sigma (\mathbf{V} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0)) \} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0)$$

$$\mathbf{F}_M = \{ \sigma (\mathbf{V} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0)$$

dengan,

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{b}) = (vb)i - (ub)j + 0k$$

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) = (vB_0)i - (uB_0)j + 0k$$

sehingga,

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) = (v(b + B_0))i + (-u(b + B_0))j + 0k$$

$$\{(\mathbf{V} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0)\} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0) =$$

$$\{(\mathbf{V} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0)\} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0) = (-u(b + B_0)^2)i - (v(b + B_0)^2)j + 0k$$

$$\{(\mathbf{V} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0)\} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0) = (-u(b + B_0)^2, -v(b + B_0)^2, 0)$$

$$\mathbf{F}_M = \sigma(-u(b + B_0)^2, -v(b + B_0)^2, 0)$$

Dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_M = \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} \quad (4.32)$$

Selanjutnya didapatkan persamaan momentum pada arah sumbu $-x$ dan sumbu $-y$ sebagai berikut:

Persamaan momentum linier pada sumbu $-x$

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + k \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial y^2} - \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} \quad (4.33)$$

Atau dapat ditulis sebagai:

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} - \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} \quad (4.34)$$

Secara sama dapat diperoleh persamaan momentum linier pada sumbu - y, yaitu :

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} - \sigma(b + B_0)^2 \bar{v} \quad (4.35)$$

4.1.3. Persamaan Energi

Pada penelitian ini menggunakan persamaan energi karena adanya pengaruh panas akibat tumbukan antar partikel pada fluida nano. Fenomena ini menunjukkan berlakunya hukum I Termodinamika mengenai energi total yang tersimpan dari suatu sistem. Hukum tersebut dapat dituliskan dalam persamaan energi untuk *unsteady flow* menurut Alkasasbech, H.T., (2015):

$$(\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{V}}) T = \alpha_{fn} \bar{\mathbf{V}}^2 T \quad (4.36)$$

Hukum I Termodinamika untuk sebuah sistem adalah laju pertambahan terhadap waktu dari energi total yang tersimpan dari suatu sistem sama dengan laju netto pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem ditambah dengan laju netto pertambahan dari kerja yang dipindahkan ke dalam sistem. Secara matematis dapat dituliskan:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho_{fn} dx = (\sum \dot{Q}_{in} - \sum \dot{Q}_{out})_{sys} + (\sum \dot{W}_{in} - \sum \dot{W}_{out})_{sys}$$

Atau dapat dituliskan

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho_{fn} dx = (\dot{Q}_{innetto} + \dot{W}_{innetto})_{sys} \quad (4.37)$$

Energi total yang tersimpan per satuan massa dari setiap partikel di dalam sistem (e) dihubungkan dengan energi dalam per satuan massa (\check{u}), energy kinetik per satuan massa ($\frac{v^2}{2}$), dan energi potensial per satuan massa (gz), diperoleh persamaan:

$$e = \check{u} + \frac{v^2}{2} + gz \quad (4.38)$$

Karena volume kendali untuk hukum I termodinamika berimpit dengan sebuah system, maka diperoleh bentuk volume kendali untuk hukum I Termodinamika menurut Teorema Transport Reynolds yaitu:

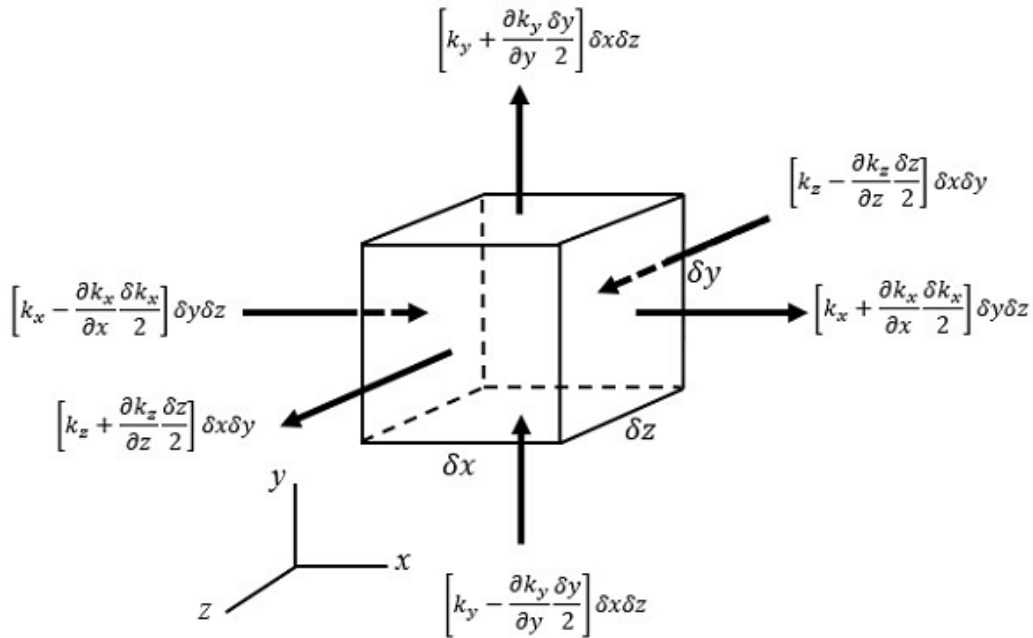
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho_{fn} dx + \int_{CS} e \rho_{fn} (\hat{n} \cdot \mathbf{V}) dS = (\dot{Q}_{innetto} + \dot{W}_{innetto})_{cv} \quad (4.39)$$

Pada penelitian ini benda dianggap diam maka tidak terjadi usaha pada sistem, maka $\dot{W} = 0$, sehingga persamaan (4.39) dalam bentuk persamaan volume kendali yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho_{fn} dx + \int_{CS} \nabla (e \rho_{fn} \cdot \mathbf{V}) dx = (\dot{Q}_{innetto})_{cv} \quad (4.40)$$

Laju netto pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem ($\dot{Q}_{innetto}$) terdiri dari konduksi panas dan sumber panas (q). Karena pada penelitian ini tidak terdapat sumber panas pada volume kontrol maka $q = 0$

Misalkan k adalah heat flux yang terjadi pada volume kontrol. Dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 4.4 Komponen *Heat Flux* pada Volume Kendali

Laju netto dari penerusan panas suatu partikel fluida dapat dihitung dari perbedaan kalor yang masuk dengan kalor yang keluar pada arah- x , arah- y dan arah- z didefinisikan sebagai berikut :

$$\left[k_x - \frac{\partial(k_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[k_x + \frac{\partial(k_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = - \frac{\partial(k_x)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (4.41)$$

$$\left[k_y - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[k_y + \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z = - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (4.42)$$

$$\left[k_z - \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[k_z + \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y = - \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (4.43)$$

Sehingga total laju netto pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem adalah

$$\left(-\frac{\partial(k_x)}{\partial x} - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} - \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \right) = (-\nabla \cdot k_{fn}) \delta x \delta y \delta z \quad (4.44)$$

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa aliran fluida yang diteliti adalah aliran fluida dua dimensi, sehingga Persamaan (4.50) menjadi

$$\left(-\frac{\partial(k_x)}{\partial x} - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z = (-\nabla \cdot \mathbf{k}) \delta x \delta y \delta z \quad (4.45)$$

Kedua ruas Persamaan (4.45) dibagi dengan $\delta x \delta y \delta z$ diperoleh,

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla e) \right) = \mathbf{V} \cdot (k_{fn} \nabla T) \quad (4.46)$$

Menurut Lienhard (2002) pengaruh dari tekanan dan perubahan kerapatan dapat diabaikan karena dalam sistem tekanan konstan (tetap), sehingga perubahan dari energi dapat didekati dengan perubahan entalpi sebagai berikut:

$$\partial e = \partial h - \partial \left(\frac{P}{\rho} \right) \approx \partial h$$

dengan mensubstitusikan $\partial h \approx C_{p_{fn}} \partial T$ ke Persamaan (4.46) sehingga diperoleh:

$$\rho C_{p_{fn}} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot (k_{fn} \nabla T) \quad (4.47)$$

dengan

$$\nabla \cdot (T \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\nabla T) + T(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

sesuai dengan persamaan kontinuitas, maka

$$\nabla \cdot (T \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \quad (4.48)$$

kemudian disubstitusikan Persamaan (4.48) ke Persamaan (4.47) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\rho C_{p_{fn}} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (k_{fn} \nabla T) \quad (4.49)$$

$$\rho C_{p_{fn}} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \right) = k_{fn} \nabla^2 T$$

Dengan

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} \cdot (\nabla T) &= (\hat{i}u + \hat{j}v) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
&= \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
\nabla \cdot (k_{fn} \nabla T) &= k_{fn} \nabla^2 T \\
&= k_{fn} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j \right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} i + \frac{\partial T}{\partial y} j \right) \right] \\
&= k_{fn} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Maka Persamaan (4.49) menjadi

$$(\rho C_p)_{fn} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = k_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.50)$$

Atau Persamaan (4.50) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.51)$$

4.2 Model Matematika Dimensional

Persamaan pembangun model yang digunakan dalam penelitian ini dapat dituliskan sebagai berikut:

a. Persamaan Kontinuitas

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{r} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{r} \bar{v}) \right] = 0 \quad (4.52)$$

b. Persamaan Momentum dalam arah sumbu $-x$

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} - \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} \quad (4.53)$$

c. Persamaan Momentum dalam arah sumbu $-y$

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} - \sigma(b + B_0)^2 \bar{v} \quad (4.54)$$

d. Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.55)$$

4.3 Model Matematika Non-Dimensional

Untuk merubah model matematika dimensional menjadi model matematika non-dimensional maka diberikan variabel-variabel non-dimensional untuk mempermudah proses komputasinya. Variabel yang digunakan sebagai berikut:

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}, Re = \frac{u_{\infty} a}{v_{fn}}, t = \frac{U_{\infty} \bar{t}}{a}, u_e(x) = \frac{\bar{u}_e(\bar{x})}{v_{\infty}}, v = Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}, u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}, v_{fn} = \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}}, p = \frac{\bar{p}}{\rho_{fn} U_{\infty}^2}, r(x) = \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a}, N = Re^{-1/2} \frac{a \bar{N}}{U_{\infty}}$$

Selanjutnya dilakukan substitusi variabel-variabel tak berdimensi di atas ke dalam persamaan pembangun yang telah didapatkan pada subbab 4.2 dan didefinisikan $M = \frac{a \sigma B_0^2}{\rho U_{\infty}}$ kemudian diasumsikan bahwa besar medan magnet menginduksi fluida yang mengalir melalui bola bermagnet adalah $\frac{1}{4}$ dari besar medan magnet dari sumbernya. sehingga diperoleh :

a. Persamaan Kontinuitas

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) \right] = 0 \quad (4.56)$$

b. Persamaan Momentum dalam arah sumbu -x

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + v_{fn} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} Mu \quad (4.57)$$

c. Persamaan Momentum dalam arah sumbu -y

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{u_{fn}}{a U_{\infty} Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{v_{fn}}{a U_{\infty}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} \frac{25}{16} Mu \quad (4.58)$$

d. Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.59)$$

Kondisi awal dan Kondisi batas sebagai berikut :

$$\bar{t} < 0 ;$$

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y}$$

$$\bar{t} \geq 0 ;$$

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \text{ maka } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), T \rightarrow T_{\infty} \text{ pada } \bar{y} \rightarrow \infty$$

4.4 Penyederhanaan Model Matematika Non-Dimensional pada Lapisan

Batas

Dengan menyederhanakan model matematika non-dimensional yang dilakukan dengan menggunakan pendekatan lapisan batas dimana bilangan Reynoldnya mendekati tak hingga ($Re \rightarrow \infty$), sehingga $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$. Dari kondisi ini maka model matematika non-dimensional selanjutnya dapat dituliskan sebagai berikut:

a. Persamaan Kontinuitas:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.60)$$

b. Persamaan Momentum Sumbu- x :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} Mu \quad (4.61)$$

c. Persamaan Momentum Sumbu- y :

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.62)$$

d. Persamaan Energi :

$$\left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (4.63)$$

Pada persamaan momentum sumbu - x (persamaan 4.61), tekanan tidak memberikan pengaruh pada kecepatan searah sumbu - x . Dengan demikian persamaan momentum yang ada pada sistem menjadi hanya persamaan momentum pada sumbu - x saja. Dengan mensubsitusikan variabel v_{nf} dan α_{nf} kedalam persamaan momentum. Sehingga pada persamaan momentum dan persamaan energi untuk aliran bebas pada fluida yang mengalir melewati bola bermagnet adalah :

Persamaan Momentum:

$$\left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left[(1-\chi) + \left(\chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} - \frac{25}{16} Mu_e \quad (4.64)$$

Persamaan Energi:

$$\left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{1}{Pr} \frac{(k_s + 2k_f) - 2x(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + x(k_f - k_s)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4.65)$$

Pada kecepatan aliran bebas dimana $u_e = \frac{3}{2} \sin x$, maka diperoleh :

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \quad (4.66)$$

Dari Persamaan (4.66) kemudian dilakukan substitusi ke Persamaan (4.65), sehingga diperoleh :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{25}{16} M u_e \quad (4.67)$$

Persamaan (4.66) disubstitusikan ke Persamaan (4.61), dan menyederhanakan Model Matematika non-Dimensional maka dapat dituliskan:

a. Persamaan Kontinuitas:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.68)$$

b. Persamaan Momentum :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]}\right] \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} - \frac{25}{16} M(u_e - u) \quad (4.69)$$

c. Persamaan Energi :

$$\left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{1}{Pr} \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{[\rho(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)][(1-\chi) + \chi\rho_{ND}]} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4.70)$$

4.5 Fungsi Alir (*Stream Function*)

Dengan adanya fungsi Alir (ψ) untu fluida yang melewati permukaan bola dapat menyederhanakan banyak persamaan dan secara komputasi dapat dibuat dalam satu variabel. Fungsi Alir dapat dinyatakan sebagai berikut (Mohammad dkk, 2013) :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.71)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.71) ke Persamaan (4.68)-(4.70) maka diperoleh:

a. Persaman Kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (4.72)$$

b. Persamaan Momentum

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]}\right] \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} - \frac{25}{16} M(u_e - u) \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]}\right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - \\ \frac{25}{16} M \left(u_e - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right) &\end{aligned}\quad (4.74)$$

c. Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.75)$$

Kondisi batas dapat dituliskan dalam bentuk fungsi alir sebagai berikut.

$$t < 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = T = 0 \text{ untuk setiap } x, y$$

$$t \geq 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, T = 1 \text{ ketika } y = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e(x), T = 0 \text{ ketika } y \rightarrow \infty$$

4.6 Persamaan Similaritas

Pada persamaan similaritas ini, akan diubah persamaan pada fungsi alir ke dalam variabel-variabel similaritas. Persamaan momentum dan persamaan energi yang merupakan hasil fungsi alir ditransformasikan kedalam variabel similaritas yang terdiri dari 2 tipe waktu yaitu untuk waktu kecil (*Small Time*) dan waktu besar (*Large Time*).

a. Untuk waktu kecil (*Small Time*) dimana $t \leq t^*$ dengan t^* sebarang nilai, diberikan persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\Psi &= t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \\ \eta &= \frac{y}{t^{1/2}} \\ W &= s(x, \eta, t)\end{aligned}\quad (4.76)$$

b. Untuk waktu besar (*Large Time*) dimana $t > t^*$ dengan t^* sebarang nilai, diberikan persamaan sebagai berikut :

$$\Psi = u_e(x)r(x)F(x, Y, t),$$

$$W = S(x, Y, t)$$

$$Y = y$$

4.6.1 Persamaan Momentum untuk waktu kecil dan waktu besar

Dengan mensubsitusikan variabel-variabel similaritas waktu kecil dan waktu besar pada Persamaan Momentum hasil dari fungsi alir maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

Persamaan Momentum untuk waktu kecil:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + t \frac{du_e}{dx} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + \frac{25}{16} Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \\ & t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + t u_e \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Persamaan Momentum untuk waktu besar:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{\eta \partial^2 F}{2 \partial Y^2} + t \frac{du_e}{dx} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + \frac{25}{16} Mt \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \\ & = t \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} + u_e \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \end{aligned}$$

Pada penelitian ini, fokus penelitian adalah pada bagian titik stagnasi ($x \approx 0$), dengan $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2}$ dan $u_e = 0$ sehingga Persamaan momentum pada waktu kecil (*Small Time*) dan waktu besar (*Large Time*) adalah :

Persamaan Momentum untuk waktu kecil:

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + \frac{3}{2} \alpha t \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \quad (4.80)$$

Persamaan Momentum untuk waktu besar:

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2} \alpha t \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta}$$

Dari Persamaan (4.92) dan Persamaan (4.93) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f'' + \frac{3}{2} t \left[1 - (f')^2 + f f'' \right] + \frac{25}{16} Mt (1 - f') = t \frac{f''}{\partial t} \\ & \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right] F''' + \frac{3}{2} t \left[1 - (F')^2 - F F'' \right] = \frac{F''}{\partial t} \end{aligned}$$

4.6.2 Persamaan Energi untuk waktu kecil dan waktu besar

Dengan mensubsitusikan variabel-variabel similaritas waktu kecil dan waktu besar pada Persamaan Energi hasil dari fungsi alir maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

Persamaan Energi untuk waktu kecil:

$$\frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{[(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)][(1 - \chi) + \chi \rho C_{ND}]} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{\partial} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial s}{\partial \eta} =$$

$$Pr t \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{r} u_e \frac{dr}{dx} + \frac{\partial s}{\partial \eta} - u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \quad (4.83)$$

Persamaan Energi untuk waktu besar:

$$\frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{[(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)][(1 - \chi) + \chi \rho C_{ND}]} \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + Pr F \frac{3}{2} \frac{\partial S}{\partial Y} = Pr \frac{\partial S}{\partial Y}$$

Pada penelitian ini, fokus penelitian adalah pada bagian titik stagnasi ($x \approx 0$), dengan $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2}$ dan $u_e = 0$ sehingga Persamaan Energi pada waktu kecil (*Small Time*) dan waktu besar (*Large Time*) adalah :

Persamaan Energi untuk waktu kecil:

$$\frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{[(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)][(1 - \chi) + \chi \rho C_{ND}]} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + Pr \frac{\eta}{\partial} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t f \frac{3}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} = Pr t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.85)$$

Persamaan Energi untuk waktu besar:

$$\frac{(k_s + \partial k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{[(k_s + \partial k_f) + \chi(k_f - k_s)][(1 - \chi) + \chi \rho C_{ND}]} \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + Pr F \frac{3}{2} \frac{\partial S}{\partial Y} = Pr \frac{\partial S}{\partial t}$$

Dari Persamaan (4.98) dan Persamaan (4.99) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{[(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)][(1 - \chi) + \chi \rho C_{ND}]} s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' + Pr t f \frac{3}{2} s' = Pr t \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{[(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)][(1 - \chi) + \chi \rho C_{ND}]} \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + Pr F \frac{3}{2} \frac{\partial S}{\partial Y} = Pr \frac{\partial S}{\partial t}$$

Dengan kondisi batas untuk waktu kecil (*Small Time*) sebagai berikut:

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ pada saat } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, s = 0 \text{ pada } \eta \rightarrow \infty$$

Dengan kondisi batas untuk waktu besar (*Large Time*) sebagai berikut:

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, \quad S = 1 \text{ pada saat } Y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, \quad S = 0 \text{ pada saat } Y \rightarrow \infty$$

Kondisi awal:

$$f = \sqrt{\frac{1}{D}} \left(2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{D}} \right) \eta \sqrt{\frac{1}{D}} + e^{\frac{-\frac{1}{4} \frac{\eta^2}{D}}}{\pi} \right) \right) - 2 \sqrt{\frac{D}{\pi}}$$

$$f' = \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1}{D}} \right)$$

$$f'' = e^{\frac{\frac{\eta^2}{4} + c_1}{D}}$$

$$s = e^{\frac{c_1 - \frac{Pr \eta^2}{4}}{G}}$$

$$s' = \operatorname{erf} \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{Pr}{G}} + 1$$

BAB V

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini menjelaskan tentang penyelesaian model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano di bawah pengaruh medan magnet secara numerik dengan menggunakan metode Keller-Box.

5.1 Penyelesaian Numerik Model

Pada penyelesaian ini dimulai dengan mengimplementasikan metode Keller-Box dengan cara mendiskritisasi model yang telah didapatkan pada bab IV yaitu similaritas dan kondisi awal. Selanjutnya dilakukan linierisasi Metode Newton dan diselesaikan dengan teknik Eliminasi Matrik Blok Tridiagonal. Tahapan yang terakhir adalah disimulasikan dengan program yang menghasilkan grafik yang selanjutnya dianalisa.

Tahapan-tahapan dalam penyelesaian numerik ini sebagai berikut :

1. Persamaan-persamaan pada sistem yang merupakan orde tinggi dibentuk menjadi persamaan-persamaan orde pertama.
2. Dilakukan proses diskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga pusat.
3. Dilakukan proses pelinieran persamaan-persamaan yang diperoleh dengan menggunakan metode Newton yang kemudian disajikan dalam bentuk matriks vektor.
4. Hasil dari proses pelinieran diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

5.1.1 Pemisalan

Persamaan (4.78), (4.79), dan (4.85) merupakan persamaan-persamaan dengan orde tinggi. Untuk penyelesaiannya secara numerik dengan metode Keller-Box , Persamaan (4.78), (4.79), dan (4.85) diubah ke dalam bentuk orde pertama, dilakukan pemisalan sebagai berikut:

1. *Small time*

Misalkan

$$f' = u \quad (5.1)$$

$$u' = v \quad (5.2)$$

$$(5.3)$$

$$s' = q$$

maka Persamaan (4.78) dan (4.85) dapat dituliskan sebagai berikut:

a. Persamaan Momentum:

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left[(1-\chi) + \left(\chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] v' + \frac{\eta}{2} v + \frac{3}{2} \alpha t [1 - u^2 + f v] + \frac{25}{16} M t (1 - u) = t \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.4)$$

b. Persamaan Energi:

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{[(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)] \left[(1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right]} q' + \frac{\text{Pr}\eta}{2} q + \frac{3}{2} \text{Pr} t f q = \text{Pr} t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (5.5)$$

2. Large Time

Misalkan

$$F' = U \quad (5.6)$$

$$U' = V \quad (5.7)$$

$$S' = Q \quad (5.8)$$

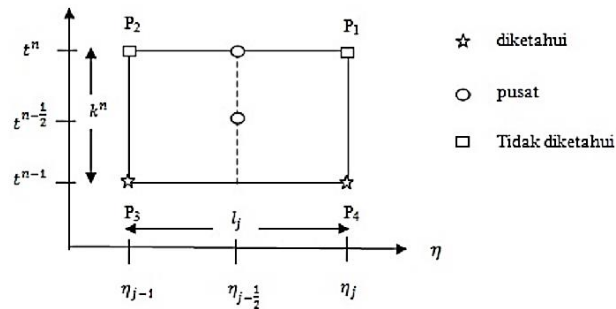
a. Persamaan Momentum:

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left[(1-\chi) + \left(\chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] V' + \frac{3}{2} [1 - U^2 + F V] + \frac{25}{16} M t (1 - U) = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (5.9)$$

b. Persamaan Energi:

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{[(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)] \left[(1-\chi) + \chi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right]} Q' + \frac{3}{2} \text{Pr} F Q = \text{Pr} t \frac{\partial S}{\partial t} \quad (5.10)$$

5.1.2 Diskritisasi Model



Gambar 5.1 Skema Beda Hingga

Pada langkah kedua dilakukan proses diskritisasi pada model matematika yang diperoleh pada waktu kecil (*Small Time*) dan pada waktu besar (*Large Time*). Pada Persamaan (5.1) – (5.3) dan Persamaan (5.6) – (5.8) menggunakan titik pusat atau titik tengah $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n\right)$ pada ruas P_1P_2 dengan beda hingga pusat. Sedangkan untuk persamaan-persamaan yang tak linier seperti Persamaan (5.4) – (5.5) dan Persamaan (5.9) – (5.10) digunakan titik pusat atau titik tengah $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}}\right)$ pada segi empat $P_1P_2P_3P_4$.

1. Diskritisasi Waktu Kecil (*Small Time*)

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{l_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j}(f_j^n - f_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (5.11)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{l_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j}(u_j^n - u_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(v_j^n - v_{j-1}^n) \quad (5.12)$$

$$\frac{(h_j^n - h_{j-1}^n)}{l_j} = q_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j}(h_j^n - h_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n) \quad (5.13)$$

Untuk persamaan momentum (5.4) diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D} \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + \frac{3}{2} t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \\ & + \frac{25}{16} M t^n \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = - \frac{1}{D} \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} \\ & - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2} t^{n-1} \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) + \frac{25}{16} M t^{n-1} \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Untuk persamaan Energi (5.5) diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & g \left(\frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2} \text{Pr} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n \\ & = g \left(\frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{3}{2} \text{Pr} t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

2. Diskritisasi Waktu Besar (*Large Time*)

$$\frac{(F_j^n - F_{j-1}^n)}{l_j} = U_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j} (F_j^n - F_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (5.16)$$

$$\frac{(U_j^n - U_{j-1}^n)}{l_j} = V_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j} (U_j^n - U_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (V_j^n - V_{j-1}^n) \quad (5.17)$$

$$\frac{(H_j^n - H_{j-1}^n)}{l_j} = Q_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j} (H_j^n - H_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (Q_j^n - Q_{j-1}^n) \quad (5.18)$$

Untuk persamaan momentum (5.9) diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \frac{(V_j^n - V_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{25}{16} M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{1}{D} \frac{(V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \\ \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{25}{16} M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) = 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Untuk persamaan Energi (5.10) diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} g \left(\frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2} \text{Pr} F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^n = \\ g \left(\frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{3}{2} \text{Pr} F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.1.3 Pelinieran Model

Setelah didapatkan hasil diskritisasi model, selanjutnya dilakukan linearisasi model pada Persamaan (5.11)-(5.19) dengan menggunakan metode Newton (Mohammad, 2014). Sebelumnya dikenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\ u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_j^{(i+1)} &= v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} \\
s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\
q_j^{(i+1)} &= q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Selanjutnya disubstitusikan bentuk iterasi (5.21) pada sistem Persamaan (5.11)-(5.19), secara sederhana dengan menghilangkan orde tinggi pada $(\delta f_j^{(i)}, \delta u_j^{(i)}, \delta v_j^{(i)}, \delta s_j^{(i)}, \delta q_j^{(i)})$ sehingga diperoleh

1. *Small time*

Persamaan (5.11)-(5.13) hasil linearisasinya adalah sebagai berikut.

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n) \tag{5.22}$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j - \delta v_{j-1}) = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n - v_{j-1}^n) \tag{5.23}$$

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) = -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n) \tag{5.24}$$

dengan melakukan pemisalan pada Persamaan (5.22)-(5.24) yaitu

$$(r_1)_j = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$(r_2)_j = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n - v_{j-1}^n)$$

$$(r_3)_j = -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n)$$

Sehingga bentuk Persamaan (5.22)-(5.24) menjadi

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \tag{5.25}$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j - \delta v_{j-1}) = (r_2)_j \tag{5.26}$$

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) = (r_3)_j \tag{5.27}$$

Selanjutnya dilakukan pemisalan berdasarkan hasil perhitungan dari Persamaan (5.14) dan (5.15) diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}
(r_4)_j &= -\frac{1}{D} \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{3}{2} t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{25}{16} M t^n \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{D} \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} -
\end{aligned}$$

$$\frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2} t^{n-1} \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right) - \frac{25}{16} M t^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \right.$$

$$\left. u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.28)$$

$$(r_5)_j = -g \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{3}{2} \text{Pr} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{1^n} - g$$

$$\frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2} \text{Pr} t^{n-1} \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{1^{n-1}} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned}
(a_1)_j &= \frac{3}{4} t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_2)_j &= (a_1)_j \\
(a_3)_j &= -\frac{3}{2} t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{\frac{25}{16} M t^n}{2} - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(a_4)_j &= (a_3)_j \\
(a_5)_j &= \frac{1}{Dl_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_6)_j &= -\frac{1}{Dl_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_1)_j &= g \frac{1}{l_j} + \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} \text{Pr} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_2)_j &= -g \frac{1}{l_j} + \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} \text{Pr} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_3)_j &= \frac{3}{4} \text{Pr} t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= \text{Pr} \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(b_6)_j &= (b_5)_j
\end{aligned}
\tag{5.30}$$

Berdasarkan kondisi batas pada (4.90) maka dapat dinyatakan bahwa $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0, \delta u_N = 0, \delta s_N = 0$.

5.1.4 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Sistem linier pada Persamaan (5.25)-(5.29) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok (Mohammad, 2014). Pada metode Keller-Box ini elemen-elemen dari blok tridiagonal berupa matriks blok, oleh karena itu terlebih dahulu dibutuhkan penentuan elemen-elemen dari matriks blok tridiagonal dari sistem linier Persamaan (5.25)-(5.29) dengan cara dibentuk tiga keadaan yaitu saat $j = 1, j = N - 1$, dan $j = N$.

Keadaan 1. Saat $j = 1$, maka Persamaan (5.25)-(5.29) menjadi

$$(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_j}{2}(\delta u_1 - \delta u_0) = (r_1)_1$$

$$(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{l_j}{2}(\delta v_1 - \delta v_0) = (r_2)_1$$

$$(\delta s_1 - \delta s_0) - \frac{l_j}{2}(\delta q_1 - \delta q_0) = (r_3)_1$$

$$(a_1)_1 \delta f_1 + (a_2)_1 \delta f_0 + (a_3)_1 \delta u_1 + (a_4)_1 \delta u_0 + (a_5)_1 \delta v_1 + (a_6)_1 \delta v_0 = (r_4)_1$$

$$(b_1)_1 \delta q_1 + (b_2)_1 \delta q_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 + (b_5)_1 \delta s_1 + (b_6)_1 \delta s_0 = (r_5)_1$$

Berdasarkan kondisi batas $\delta f_0 = 0$, $\delta u_0 = 0$, $\delta s_0 = 0$ maka sistem diatas dapat dibentuk dalam matriks berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_6)_1 & 0 & (a_1)_1 & (a_5)_1 & 0 \\ 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta q_0 \\ \delta f_1 \\ \delta v_1 \\ \delta q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta s_1 \\ \delta f_2 \\ \delta v_2 \\ \delta q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_1 \\ (r_3)_1 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas dapat dituliskan sebagai berikut.

$$[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$$

Bentuk ini berlaku untuk $j = 1$.

Keadaan 2. Saat nilai $j = N - 1$ maka Persamaan (5.25)-(5.29) menjadi

$$(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) = (r_1)_{N-1}$$

$$(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta v_{N-1} - \delta v_{N-2}) = (r_2)_{N-1}$$

$$(\delta s_{N-1} - \delta s_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta q_{N-1} - \delta q_{N-2}) = (r_3)_{N-1}$$

$$(a_1)_{N-1} \delta f_{N-1} + (a_2)_{N-1} \delta f_{N-2} + (a_3)_{N-1} \delta u_{N-1} + (a_4)_{N-1} \delta u_{N-2} \\ + (a_5)_{N-1} \delta v_{N-1} + (a_6)_{N-1} \delta v_{N-2} = (r_4)_{N-1}$$

$$(b_1)_{N-1} \delta q_{N-1} + (b_2)_{N-1} \delta q_{N-2} + (b_3)_{N-1} \delta f_{N-1} + (b_4)_{N-1} \delta f_{N-2} + (b_5)_{N-1} \delta s_{N-1} \\ + (b_6)_{N-1} \delta s_{N-2} = (r_5)_{N-1}$$

Dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_{N-1} & (a_6)_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_{N-1} & 0 & (b_2)_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{N-2} \\ \delta q_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ (a_4)_{N-1} & 0 & (a_1)_{N-1} & (a_5)_{N-1} & 0 \\ 0 & (b_6)_{N-1} & (b_3)_{N-1} & 0 & (b_1)_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-2} \\ \delta s_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_{N-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_{N-1} \\ (r_2)_{N-1} \\ (r_3)_{N-1} \\ (r_4)_{N-1} \\ (r_5)_{N-1} \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks di atas dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

Bentuk ini berlaku untuk setiap $j = 2, 3, \dots, N-1$.

Keadaan 3. Saat nilai $j = N$ maka Persamaan (5.25)-(5.29) menjadi

$$(\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta u_N - \delta u_{N-1}) = (r_1)_N$$

$$(\delta u_N - \delta u_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta v_N - \delta v_{N-1}) = (r_2)_N$$

$$(\delta s_N - \delta s_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta q_N - \delta q_{N-1}) = (r_3)_N$$

$$\begin{aligned}
 (a_1)_N \delta f_N + (a_2)_N \delta f_{N-1} + (a_3)_N \delta u_N + (a_4)_N \delta u_{N-1} + (a_5)_N \delta v_N + (a_6)_N \delta v_{N-1} \\
 = (r_4)_N
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b_1)_N \delta q_N + (b_2)_N \delta q_{N-1} + (b_3)_N \delta f_{N-2} + (b_4)_N \delta f_{N-1} + (b_5)_N \delta s_N + (b_6)_N \delta s_{N-1} \\
 = (r_5)_N
 \end{aligned}$$

Dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_N & (a_6)_N & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_N & 0 & (b_2)_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{l_N}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ (a_4)_N & 0 & (a_1)_N & (a_5)_N & 0 \\ 0 & (b_6)_N & (b_3)_N & 0 & (b_1)_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_N \\ (r_2)_N \\ (r_3)_N \\ (r_4)_N \\ (r_5)_N \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks di atas dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$$

Bentuk ini berlaku untuk $j = N$.

Dengan demikian secara keseluruhan untuk $j = 1, 2, 3, \dots, N$ secara sederhana dapat dituliskan

$$\begin{aligned} j = 1 & : [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\ j = 2 & : [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\ j = 3 & : [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [r_3] \\ & \vdots \\ j = N-1 & : [B_{N-1}][\delta_{N-2}] + [A_{N-1}][\delta_{N-1}] + [C_{N-1}][\delta_N] = [r_{N-1}] \\ j = N & : [B_N][\delta_{N-1}] + [A_N][\delta_N] = [r_N] \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan sebagai

$$A\delta = r \quad (5.31)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} [A_1] & [C_1] & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] \\ & & & & [B_N] & [A_N] \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{N-1}] \\ [r_N] \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (5.28), dapat dilihat bahwa matriks A adalah matriks tridiagonal yang elemen-elemennya bernilai nol kecuali pada diagonal utamanya. Persamaan (5.28) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok. Matriks A adalah matriks *non singular* sehingga dapat difaktorkan sebagai

$$A = LU \quad (5.32)$$

dengan

$$L = \begin{bmatrix} [\alpha_1] & & & & \\ [B_2] & [\alpha_1] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [\alpha_{N-1}] \\ & & & & [B_N] & [\alpha_N] \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & \\ & [I] & [\Gamma_2] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & [I] & [\Gamma_{N-1}] \\ & & & & & [I] \end{bmatrix}$$

dengan $[I]$ adalah matriks identitas yang berukuran 5×5 dan $[\alpha_j]$, $[\Gamma_j]$ merupakan matriks ukuran 5×5 dengan elemen-elemennya ditentukan dengan persamaan berikut

$$[\alpha_j] = [A_1]$$

$$\begin{aligned}
[A_1][\Gamma_j] &= [C_1] \\
[\alpha_j] &= [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], j = 2, 3, \dots, N \\
[\alpha_j][\Gamma_j] &= [C_j], j = 2, 3, \dots, N - 1
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menyubstitusikan Persaman (5.39) pada Persamaan (5.38) maka didapatkan persamaan

$$LU\delta = r \quad (5.33)$$

Denga mendefiniskan bahwa

$$LU\delta = W \quad (5.34)$$

Sehingga Persamaan (5.40) dapat dituliskan sebagai

$$LW = r \quad (5.35)$$

Dengan

$$W = \begin{pmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{pmatrix}$$

Dan $[W_j]$ adalah matriks berukuran 5×1 dengan elemen-elemennya didapatkan Persamaan (5.35) yaitu

$$[\alpha_1][W_1] = [r_1]$$

$$[\alpha_j][W_j] = [r_j] - [B_j][W_{j-1}], 2 \leq j \leq N$$

Setelah didapatkan elemen-elemen dari matriks W, maka selanjutnya dapat di tentukan penyelesaian dari δ pada Persamaan (5.41) dengan menggunakan persamaan berikut

$$[\delta_j] = [W_1]$$

$$[\delta_j] = [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], 1 \leq j \leq N - 1$$

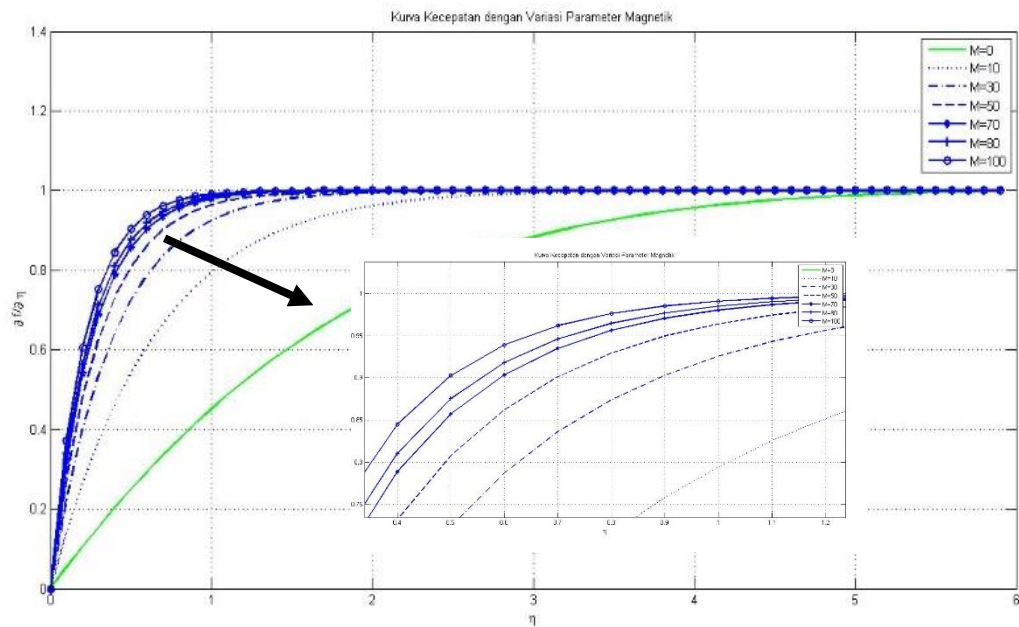
Dengan diperolehnya nilai δ , maka Persamaan (5.25)-(5.29) dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian Persamaan (5.21) dengan melakukan iterasi sebanyak sampai memenuhi kriteria konvergen. Menurut Cebeci dan Bradshaw kriteria konvergen menggunakan $v(0, t)$ dan iterasi berhenti saat didapatkan $|\delta v(0, t)| < \varepsilon$, dimana nilai dari ε sangat kecil. Pada penelitian ini digunakan $\varepsilon = 10^{-5}$ (Mohammad, 2014).

5.2 Hasil Simulasi Numerik

Tahapan selanjutnya adalah simulasi numerik dengan menggunakan Matlab. Pada tahapan simulasi ini yang diinputkan beberapa parameter, tetapi pada subbab ini hanya akan ditampilkan mewakili percobaan simulasi yang telah dilakukan. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan, diperoleh hubungan antara parameter magnetic (M), Densitas Fluida Nano ρ_{ND} , Kapasitas Panas Fluida Nano ρC_{ND} , bilangan Prandtl (Pr), *volume fraction nano fluid* (χ), dengan profil kecepatan (f') dan profil temperature (s).

5.2.1 Profil Kecepatan dengan variasi Magnetik

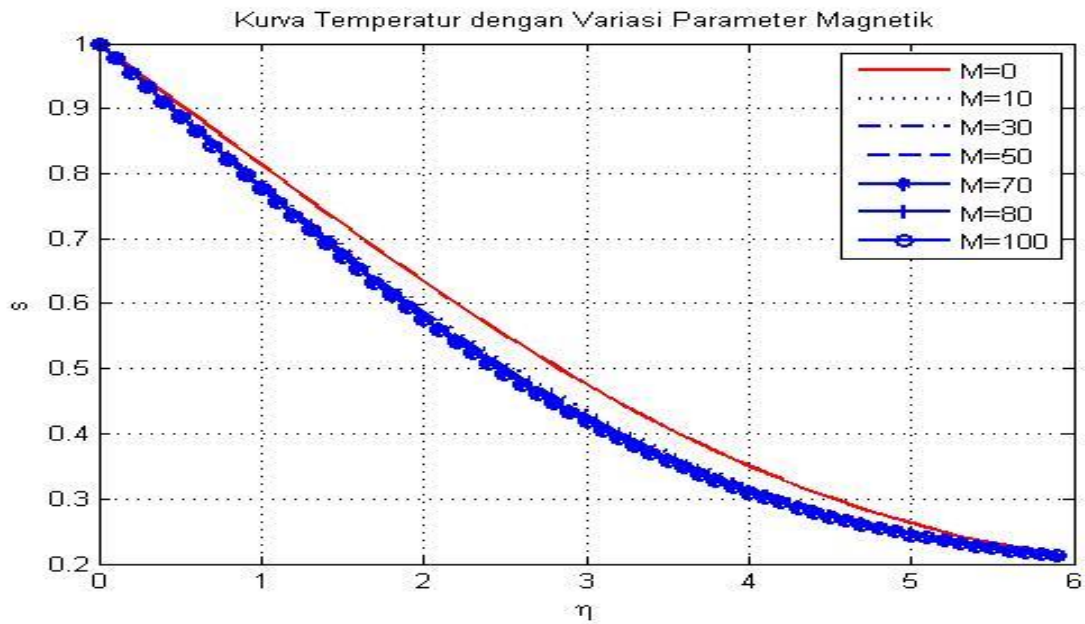
Simulasi mengenai pengaruh dari variasi Parameter Magnetik menggunakan parameter-parameter yang konstan yaitu: ($Pr = 0.8$, $\chi = 0.2$, $\rho_{ND} = 8.9$, $\rho C_{ND} = 0.8$).



Gambar 5.2 Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik

Simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh kecepatan terhadap variasi parameter magnetic pada fluida nano. Nilai $M = 0$ menyatakan bahwa tidak adanya pengaruh medan magnet pada aliran. Jika diamati dengan variasi parameter magnetic kecepatan mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya parameter magnetik.

Hal ini terjadi karena besar medan magnet yang bekerja semakin besar dan densitas fluida yang semakin kecil dengan bertambahnya parameter magnetik.

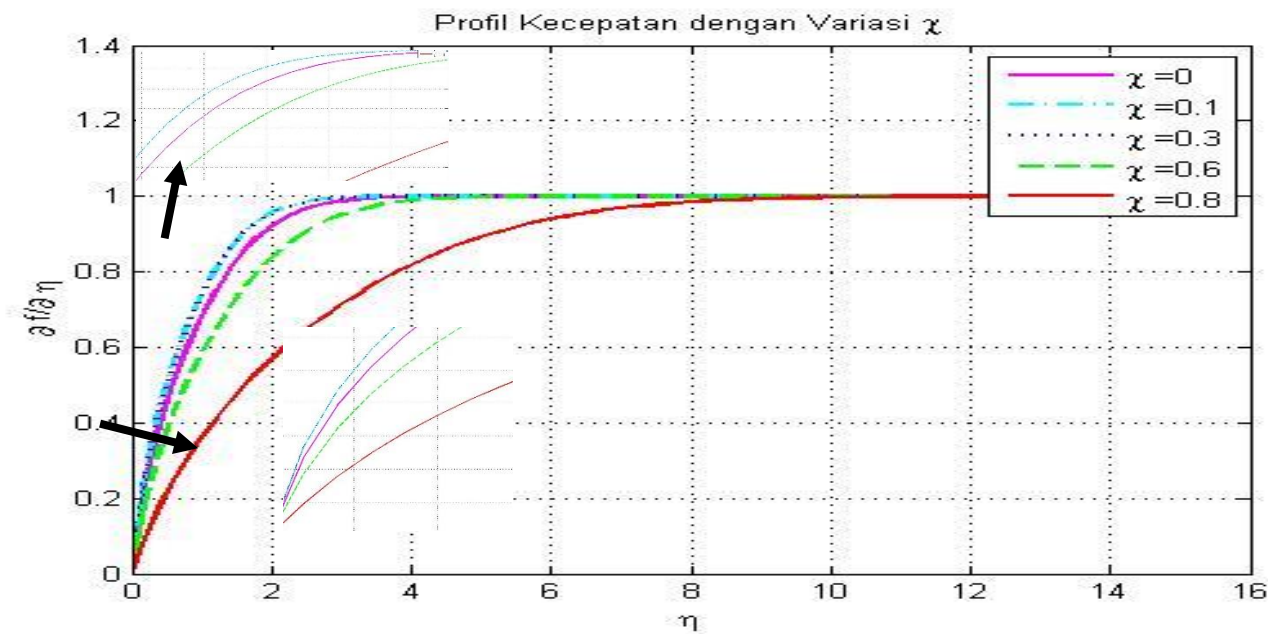


Gambar 5.3 Profil Temperatur dengan variasi Parameter Magnetik

Pada gambar grafik ditunjukkan bahwa seiring bertambahnya parameter magnetik temperatur yang dihasilkan semakin menurun. Hal ini dikarenakan gaya lorentsz yang disebabkan oleh adanya medan magnet pada bola, sehingga semakin bertambah energi internal pada fluida. Dapat juga diamati bahwa temperatur mengalami penurunan dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Ketika $0 < \eta < 5,9$, temperatur semakin menurun ketika parameter magnetik semakin bertambah. Hal ini terjadi karena energi internal fluida nano yang semakin meningkat.

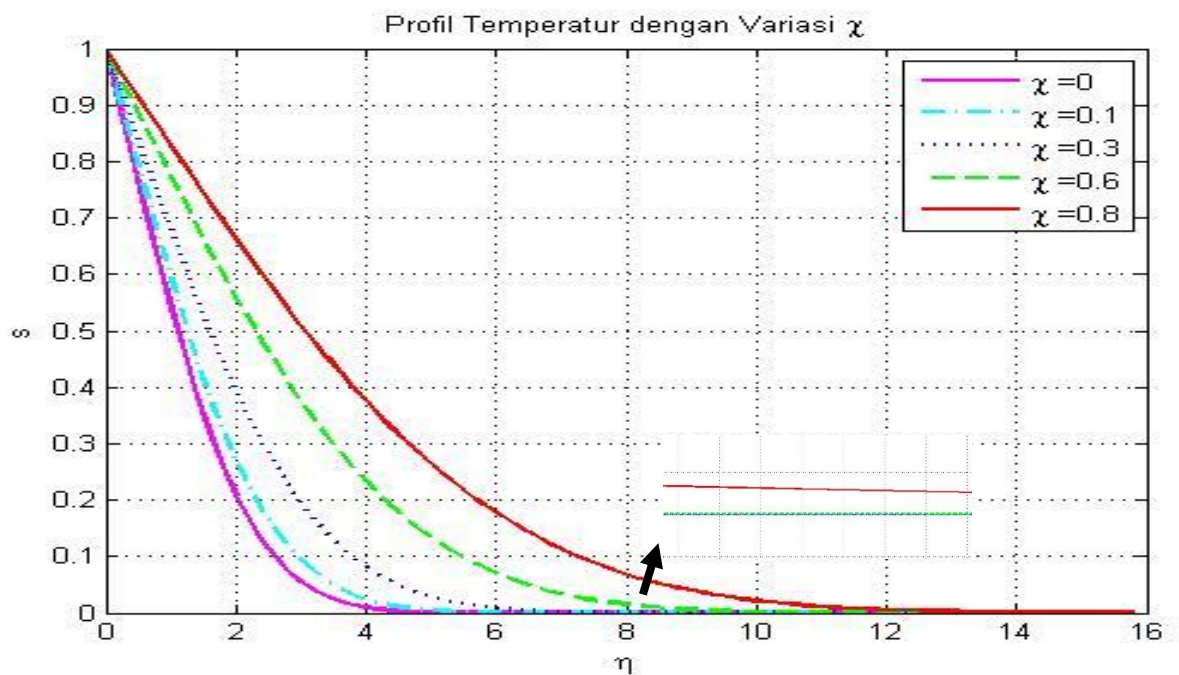
5.2.2 Pengaruh Variasi Nano partikel Volume Fraction

Simulasi mengenai pengaruh dari variasi Nano partikel Volume Fraction menggunakan parameter-parameter yang konstan yaitu: ($Pr = 7, M = 1, \rho_{ND} = 8.9, \rho C_{ND} = 0.8$).



Gambar 5.4 Profil Kecepatan dengan Variasi Nano partikel Volume Fraction

Pada simulasi ini dapat dilihat bahwa profil kecepatan variasi Nano partikel Volume Fraction semakin meningkatnya pada saat nilai χ adalah $0 \leq \chi \leq 0.5$ dan semakin berkurang saat $\chi = 0.6 \leq \chi \leq 0.9$.

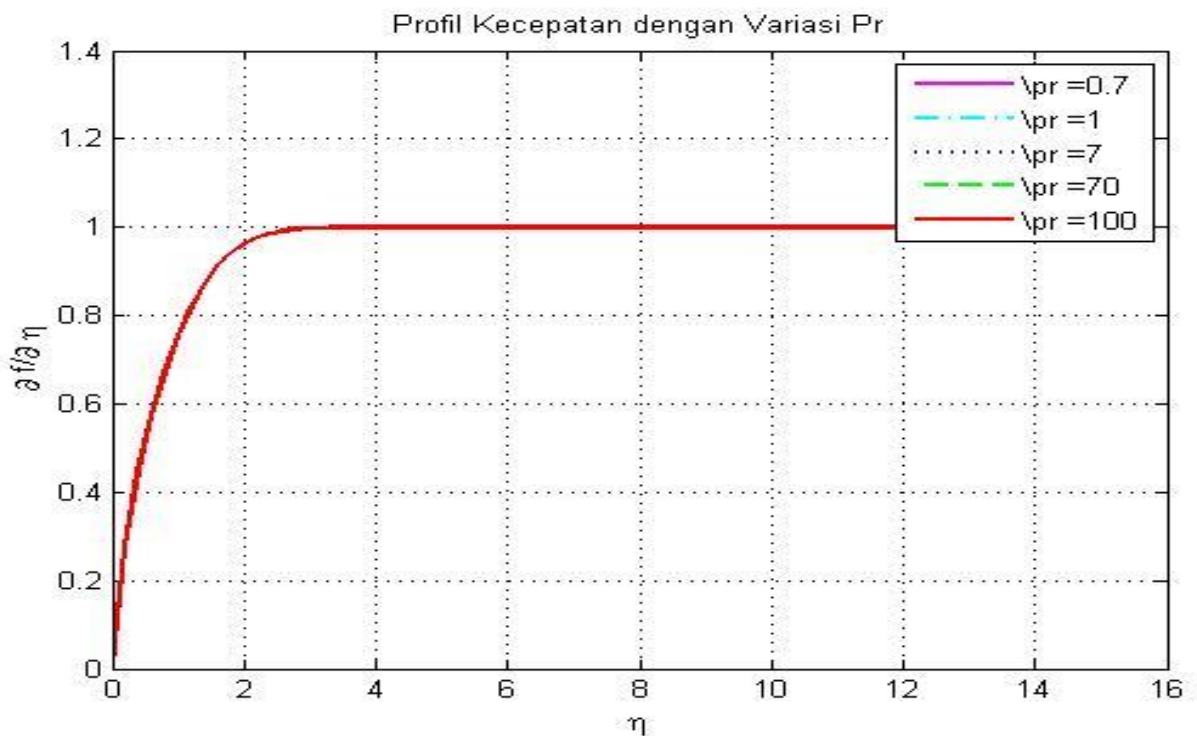


Gambar 5.5 Profil Temperatur dengan Variasi Nano partikel Volume Fraction

Semakin besar nilai Nano partikel Volume Fraction maka panas yang ditumbulkan pada fluida nano akan semakin besar disebabkan tumbukan antar partikel nano yang memiliki skala 1-100 nm. Terlihat pada gambar bahwa grafik menunjukkan semakin besar nilai Nano partikel Volume Fraction akan meningkatkan profil temperature fluida nano.

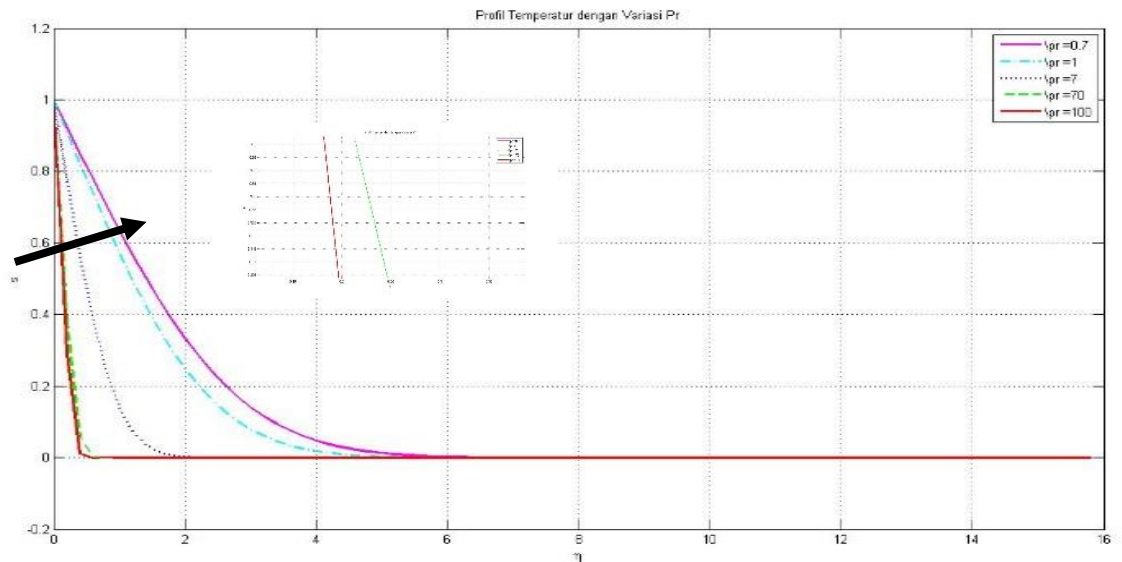
5.2.3 Pengaruh Variasi Bilangan Prandtl

Simulasi mengenai pengaruh dari variasi Parameter Magnetik menggunakan parameter-parameter yang konstan yaitu: ($M = 1$, $\chi = 0.2$, $\rho_{ND} = 8.9$, $\rho C_{ND} = 0.8$).



Gambar 5.6 Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl

Pada simulasi ini diberikan beberapa variasi nilai Bilangan Prandtl. Dan terlihat bahwa semakin besar nilai Bilangan Prandtl semakin meningkat profil kecepatan. Di dalam penelitian ini Bilangan Prandtl berpengaruh pada profil temperature karena adanya energi yang berada di dalam fluida nano.

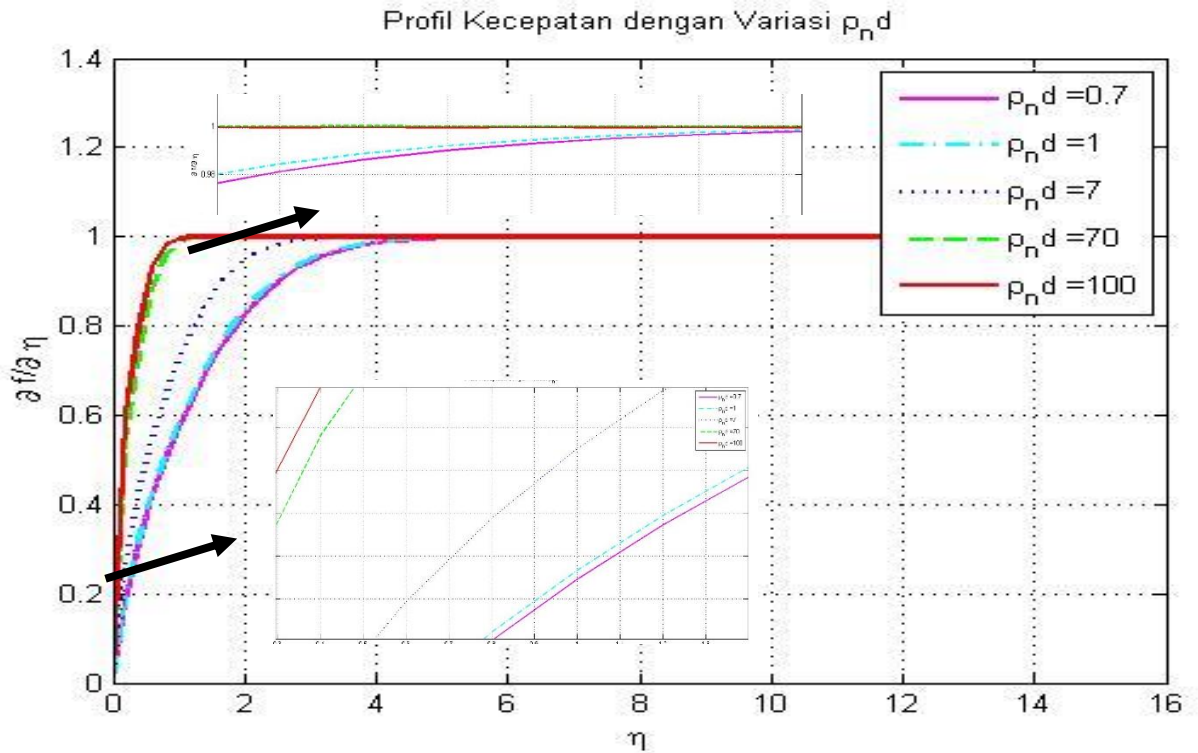


Gambar 5.7 Profil Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl

Jika diamati dengan variasi bilangan Prandtl, kurva temperatur semakin menurun dengan bertambahnya bilangan Prandtl. Bilangan Prandtl merupakan perbandingan viskositas kinematika dengan difusivitas termal. Viskositas kinematika berkaitan dengan kecepatan perpindahan antara molekul, sedangkan difusivitas termal berkaitan dengan perbandingan penerusan panas dengan kapasitas penyimpanan energi molekul. Semakin besar bilangan Prandtl mengakibatkan difusivitas termal semakin kecil karena bilangan Prandtl berbanding terbalik dengan difusivitas termal. Ini berarti bahwa dengan bertambahnya bilangan Prandtl maka distribusi panas antar fluida berkurang atau dapat dikatakan perpindahan panas ke permukaan benda lebih cepat dari pada fluidanya sehingga mengakibatkan temperatur fluida semakin menurun dengan bertambahnya bilangan Prandtl.

5.2.4 Pengaruh Variasi Densitas Fluida Nano

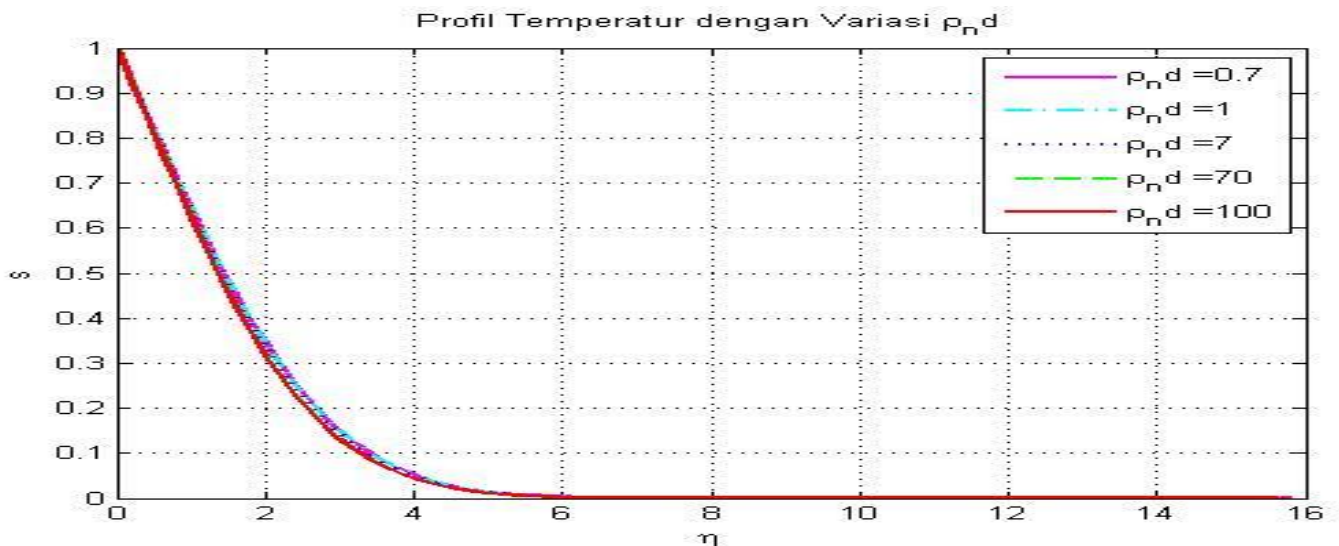
Simulasi mengenai pengaruh dari variasi densitas fluida nano menggunakan parameter-parameter yang konstan yaitu: ($Pr = 0.8$, $M = 1$, $\rho C_{ND} = 0.7$). Simulasi terhadap profil kecepatan, dapat dilihat pada grafik bahwa semakin meningkatnya nilai densitas fluida nano ρ_{ND} , maka akan meningkatkan profil kecepatan fluida yang melewati bola.



Gambar 5.8 Profil Kecepatan dengan Variasi Densitas Fluida Nano

Densitas fluida nano itu sendiri adalah rasio densitas partikel dengan densitas fluida dasar. Maka mengakibatkan meningkatnya kecepatan seiring meningkatnya densitas fluida nano.

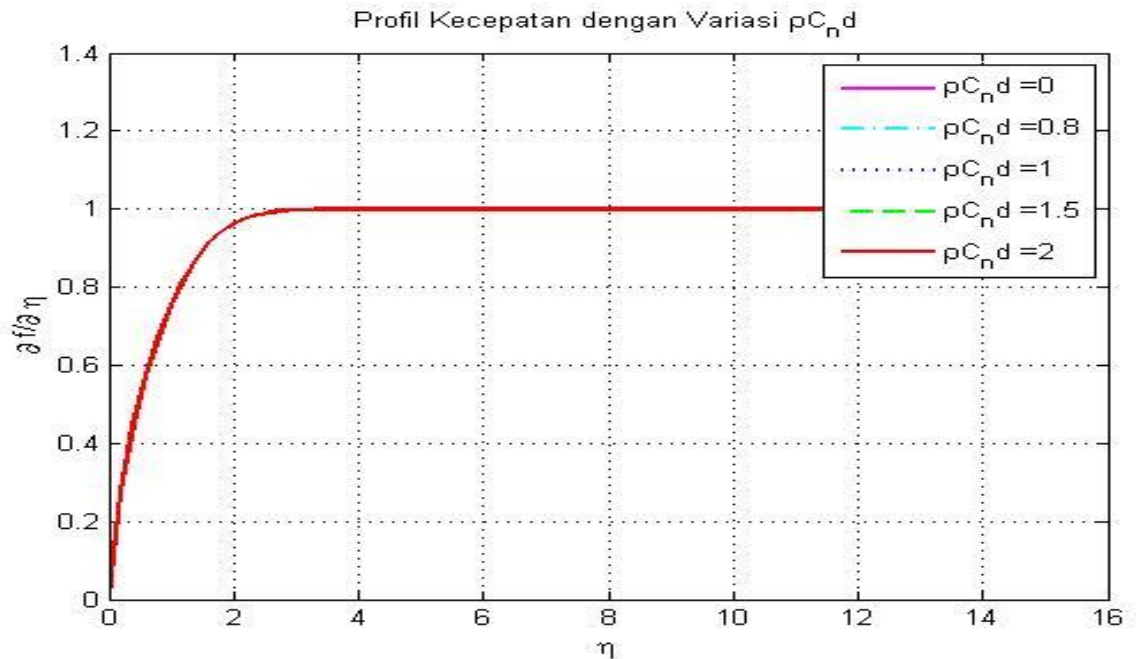
Simulasi pengaruh variasi densitas fluida nano terhadap profil temperatur pada grafik dapat dilihat bahwa temperatur fluida yang melewati bola mengalami penurunan saat densitas fluida bertambah. Sehingga dapat disimpulkan dari simulasi ini, jika densitas fluida nano semakin kecil maka temperatur fluida yang melewati bola



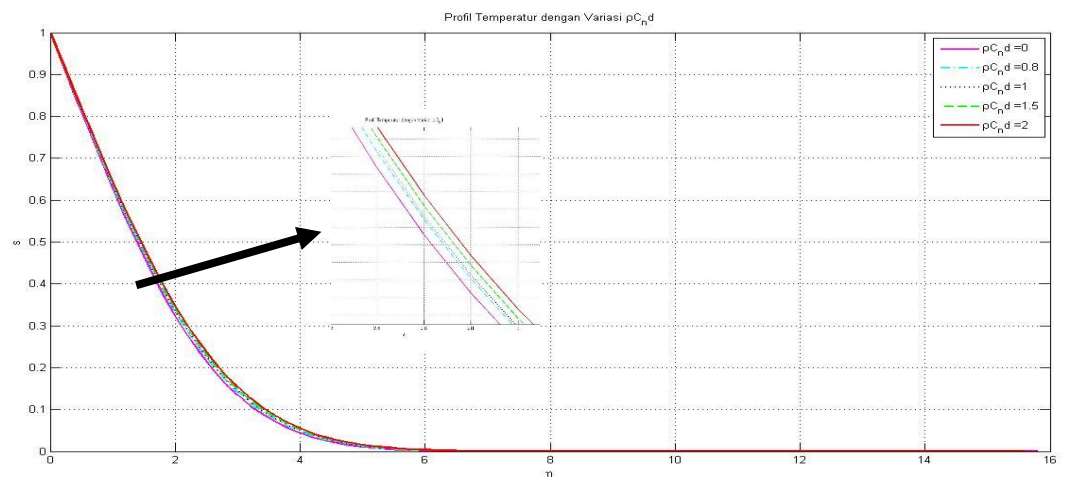
Gambar 5.9 Profil Temperatur dengan Variasi Densitas Fluida Nano

5.2.5 Pengaruh Variasi Kapasitas Panas Fluida Nano

Simulasi mengenai pengaruh dari variasi Kapasitas Panas Fluida Nano menggunakan parameter-parameter yang konstan yaitu: ($Pr = 0.8, M = 1, \chi = 0.2, \rho_{ND} = 4$). Dari grafik dapat diketahui berapapun besar nilai ρC_{ND} yang diinputkan maka profil kecepatan fluida nano akan konstan.



Gambar 5.10 Profil Kecepatan dengan Variasi Kapasitas Panas Fluida Nano



Gambar 5.11 Profil Temperatur dengan Variasi Kapasitas Panas Fluida Nano

Pada Gambar diatas terlihat profil temperatur terhadap variasi kapasitas panas fluida nano semakin kecil dengan semakin meningkatnya variasi C_{ND} . didalam fluida nano terdapat energy yang dihasilkan dan dipengaruhi besar kecilnya dari

kapasitas panas yang terjadi. Kapasitas panas adalah tenaga yang harus ditambahkan untuk menaikkan temperatur sebanyak 1°C.

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang telah dilakukan , maka diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Model Matematika dari Magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano di bawah pengaruh medan magnet dibangun oleh tiga persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas , persamaan momentum dan persamaan energi yang masing-masing diperoleh dari penurunan hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I termodinamika. Kemudian ditransformasikan ke dalam bentuk tak-berdimensi selanjutnya diubah ke dalam persamaan similaritas untuk mendapatkan bentuk model akhir dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano di bawah pengaruh medan magnet.

2. Model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida nano di bawah pengaruh medan magnet dapat diselesaikan menggunakan metode numerik yaitu Metode Keller-box.

Hasil simulasi numerik dengan menggunakan beberapa variasi parameter yaitu parameter magnetik (M) , bilangan Prandtl (Pr), Nano partikel Volume Fraction terhadap kurva kecepatan dan temperatur, dapat disimpulkan sebagai berikut:

- i). Semakin meningkatnya parameter magnetik (M) didapatkan bahwa kecepatan fluida yang dihasilkan semakin meningkat, sedangkan temperaturnya semakin menurun.
- ii). Semakin meningkatnya bilangan Prandtl (Pr) kecepatan fluida berpengaruh. Untuk kurva temperatur, temperatur fluida mengalami penurunan saat meningkatnya bilangan Prandtl (Pr) .
- iii). Semakin meningkatnya parameter Nano partikel Volume maka panas yang ditimbulkan pada fluida nano akan semakin besar disebabkan tumbukan antar

partikel nano yang memiliki skala 1-100 nm. Semakin besar nilai Nano partikel Volume Fraction akan meningkatkan profil temperatur fluida nano.

iv) Semakin besar nilai η maka semakin meningkat profil kecepatan, semakin besar bilangan Pr yang diinputkan maka semakin kecil temperature fluida yang dihasilkan.

v). Semakin meningkatnya profil kecepatan pada saat nilai χ adalah $0 \leq \chi \leq 0.5$ dan semakin berkurang saat $\chi = 0.6 \leq \chi \leq 0.9$, semakin besar nilai χ maka makin meningkat profil temperature fluida.

6.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang dapat diberikan pada penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

a. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan studi tidak pada titik stagnasi atau ($x \neq 0$), sehingga dapat dilihat kurva kecepatan dan temperatur disekeliling permukaan bola.

DAFTAR PUSTAKA

- Alkasasbech, H. T. (2015). *Numerical Solution for Convection Boundary Layer Flow Over A Solid Sphere of Newtonian and Non-Newtonian Fluid*. University Malaysia Pahang, Malaysia.
- Al-Shibani, F.S., Ismail, A.I Md., dan Abdullah, F. A. (2012). *The Implicit Keller Box Method for the one dimensional time fractional diffusion equation*. Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics, Vo. 2, no.3, 2012, hal 69-84
- Arber, T. (2013), *Fundamentals of Magnetohydrodynamics (MHD)*, Lecture handout: University of Warwick, UK
- Brujan, E.A. (2011). Cavitation in Non-Newtonian Fluids. Non-Newtonian Fluids (pp.1-47). Springer Berlin Heidelberg.
- Effendi, dkk. (2007). Medan Elektromagnetika Terapan. Jakarta : Erlangga.
- Ghani, M., Widodo, B. and Imron, C. (2015) *Incompressible And Mixed Convection Flow Steady Over Past A Sphere*, The 1st Young Scientist International Conference of Water Resources Development and Environmental Protection, Malang, Indonesia, 5-7 June 2015.
- Imron, C., Suhariningsih, Widodo, B. dan Yuwono, T. (2013), Numerical Simulation of Fluid Flow Around Circular and I-Shape Cylinder in a Tandem Configuration, Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, 2013, no. 114, 5657 – 5666, HIKARI Ltd Journals and Books Publisher, Bulgaria.
- Mohammad, N. F., Mohd Kasim, A. R., Ali, A. and Shafie, S. (2012). Unsteady mixed convection boundary layer flow past a sphere in a micropolar fluid. In *American Institute of Physics Conference Series*. Vol. 1450. 211-217.
- Mohammad, N. F. (2014), *Unsteady Magnetohydrodynamics Convective Boundary layer Flow Past A Sphere in Viscous and Micropolar Fluids*, University Technology Malaysia, Malaysia.
- Pradikawanti, Widodo, B. and Imron, C. (2015) *Viscoelastic Fluid Past A Flat Plate With The Effect Of Magnetohydrodynamic*, The 1st Young Scientist International Conference of Water Resources Development and Environmental Protection, University of Brawijaya Malang, 5-7 Juni 2015.

- Ramadhan, A.I, 2012, *Analisis Perpindahan Panas Fluida Pendingin Nano fluida Di Teras Reaktor PWR (Pressurized Water Reactor) Dengan Computational Fluid Dynamics*, Tesis Program Magister, Universitas Pancasila, Jakarta.
- Roetzel. (2000). *Temperature dependence of thermal conductivity enhancement for nanofluids*, Journal of Heat Transfer, Vol. 125, hal 567-574.
- Rumite, W., Widodo, B. and Imron, C. (2015) *The Numerical Solution Of Free Convection Flow Of Visco-Elastic Fluid Heat Generation Past With Over A Sphere*, The 1st Young Scientist International Conference of Water Resources Development and Environmental Protection, Malang, Indonesia, 5-7 June 2015.
- Widodo, B. (2012). *Pemodelan Matematika*, itspress. Surabaya
- Widodo, B. (2012). *The Influence Of Hydrodynamics On Pollutant Dispersion In The River*. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences (IJCMS) ISSN 1312-7586. Vol. 7. 2012. no. 45, from 2229 to 2234, HIKARI Ltd Journals and Books Publisher. Bulgaria.
- Widodo, B. (2013), *Mathematical Modeling of Total Suspended Solid Occurred in A Confluence of Two Rivers*, submitted to The International Journal of Applied Mathematical Sciences (International journals and books publishers of science, technology and medicine, Hikari Ltd Bulgaria).
- Widodo, B., Imron, C., Asiyah, N., Siswono, G.O., Rahayuningsih, T. and Purbandini (2016). *Viscoelastic Fluid Flow Past a Porous Circular Cylinder when The Magnetic Field Included*, *Far East Journal Mathematical and Sciences (Puspha Publishing House India)*, Vol 99 No 2: 173-186.
- Widodo, B., Siswono, G.O. and Imron, C. (2015). *Viscoelastic Fluid Flow With The Presence Of Magnetic Field Past A Porous Circular Cylinder*, International Research Conference on Science, Health and Medicine (ICSHM) 2015, academics world, Bangkok – Thailand, 16 Juni 2015.
- Widodo, B., Khalimah, D.A., Zainal, F.D.S. and Imron, C. (2015) *The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameters on unsteady magnetohydrodynamic Forced Convection Boundary Layer Flow of a Viscous Fluid Past A Sphere*, International Conference on Science and Innovative Engineering (ICSIE), Kuala Lumpur - Malaysia, October 16, 2015.

LAMPIRAN

Lampiran 1 : Penyelesaian Persamaan Pembangun ke Persamaan Non Dimensional

1. Persamaan Kontinuitas :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial (aruU_\infty)}{(ax)} + \frac{\partial (arvU_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial (ayRe^{-\frac{1}{2}})} &= 0 \\ \frac{aU_\infty}{a} \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{aU_\infty}{a} \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0 \\ U_\infty \left(\frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv)}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum Linier Sumbu - x :

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma(b + B_0)^2 \bar{u}$$

Ruas kiri :

$$\begin{aligned}\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \\ \rho_{fn} \left(\frac{\partial (uU_\infty)}{\partial \left(\frac{at}{U_\infty} \right)} + (uU_\infty) \frac{\partial (uU_\infty)}{\partial (ax)} + \left(\frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial (uU_\infty)}{\partial (ayRe^{-\frac{1}{2}})} \right) &= \\ \rho_{fn} \left(\frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(uU_\infty^2)}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(vU_\infty^2)}{a} \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \\ \rho_{fn} \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &\end{aligned}$$

Ruas kanan :

$$- \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma(b + B_0)^2 \bar{u}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial(\rho \rho_{fn} U_\infty^2)}{\partial(ax)} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(ax)^2} + \frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial\left(\frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)^2} \right) - \sigma(b+B_0)^2(uU_\infty) \\
&= -\frac{(\rho_{fn} U_\infty^2)}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{fn} \left(\frac{U_\infty}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U_\infty}{a^2} Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sigma(b+B_0)^2(uU_\infty) \\
&= -\frac{(\rho_{fn} U_\infty^2)}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{fn} \left(\frac{U_\infty}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sigma(b+B_0)^2(uU_\infty)
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
\rho_{fn} \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{(\rho_{fn} U_\infty^2)}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{fn} \left(\frac{U_\infty}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
&\quad - \sigma(b+B_0)^2(uU_\infty)
\end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan $\left(\rho_{fn} \frac{U_\infty^2}{a}\right)$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\mu_{fn}}{a \rho_{fn} U_\infty} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
&\quad - \frac{\sigma(b+B_0)^2 u a}{\rho_{fn} U_\infty}
\end{aligned}$$

Karena $M = \frac{a\sigma(b+B_0)^2}{\rho U_\infty}$, $v_{fn} = \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}}$ dan $Re = \frac{a\rho U_\infty}{\mu}$, diasumsikan bahwa

$b = \frac{1}{4} B_0$, maka :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + Re^{-1}(v_{fn}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{25}{16} Mu$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{25}{16} Mu$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + -\frac{25}{16} Mu$$

3. Persamaan Momentum Linier Sumbu - y :

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma(b + B_0)^2 \bar{v}$$

Ruas kiri :

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= \\ \rho_{fn} \left(\frac{\partial \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left(\frac{at}{U_\infty} \right)} + (u U_\infty) \frac{\partial \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (ax)} + \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left(ay Re^{-\frac{1}{2}} \right)} \right) &= \\ \rho_{fn} \left(\frac{U_\infty^2}{a Re^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u U_\infty^2}{a Re^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v U_\infty^2}{a Re^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \\ \rho_{fn} \frac{U_\infty^2}{a Re^{1/2}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Ruas kanan :

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + k) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma(b + B_0)^2 \bar{v} &= \\ = - \frac{\partial (\rho_{fn} p U_\infty^2)}{\partial \left(ay Re^{-\frac{1}{2}} \right)} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (ax)^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left(\frac{ay}{Re^{1/2}} \right)^2} \right) - \sigma(b + B_0)^2 \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right) &= \\ = - \frac{(\rho_{fn} U_\infty^2)}{\left(a Re^{-\frac{1}{2}} \right)} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{fn} \left(\frac{\left(\frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\left(\frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)}{\left(\frac{a^2}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \sigma(b + B_0)^2 \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right) &= \\ = - \frac{\left(\rho_{fn} U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}} \right)}{a} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{fn} \left(\frac{U_\infty}{a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \sigma(b + B_0)^2 \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right) \end{aligned}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan maka:

$$\rho_{fn} \frac{U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{(\rho_{fn} U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}})}{a} \frac{\partial p}{\partial y} +$$

$$\mu_{fn} \left(\frac{U_\infty}{a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \sigma (b + B_0)^2 \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)$$

Kedua ruas dibagi dengan $\rho_{fn} \frac{U_\infty^2 Re^{1/2}}{a}$ dan Karena $M = \frac{a\sigma(b+B_0)^2}{\rho U_\infty}$ serta $v_{fn} = \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}}$. Diasumsikan bahwa $b = \frac{1}{4} B_0$ maka diperoleh :

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_{fn}}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{v_{fn}}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{25}{16} \frac{M}{Re} v$$

4. Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

Ruas Kiri :

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(taU_\infty^{-1})} \right) + uU_\infty \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ax)} +$$

$$vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ayRe^{-\frac{1}{2}})}$$

$$= (T_w - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) +$$

$$\rho C_p \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial T_\infty}{\partial t} + u \frac{\partial T_\infty}{\partial x} + v \frac{\partial T_\infty}{\partial y} \right)$$

Karena T_∞ adalah suatu konstanta maka $\frac{\partial T_\infty}{\partial t} = 0, \frac{\partial T_\infty}{\partial x} = 0, \frac{\partial T_\infty}{\partial y} = 0$, maka

$$(T_w - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

Ruas Kanan :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) &= \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (ax)^2} + \frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial \left(ay Re^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right) \\
 &= \alpha_{fn} \left(\frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
 &= \alpha_{fn} \frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, dapat ditliskan

$$(T_w - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha_{fn} \frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Ruas kiri dan kanan dibagi dengan $\frac{(T_w - T_\infty) U_\infty}{a}$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\alpha_{fn}}{a U_\infty \rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\
 &= \frac{\alpha_{fn}}{a U_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{fn} Re}{a U_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
 &= \frac{\alpha_{fn}}{v Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{fn} Re}{v Re} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
 &= \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

Kecepatan aliran bebas (*Free Stream*) dalam bentuk koordinat bola (*Spherical*)

adalah:

$$U_r = -U_\infty \cos \theta \quad (1.1)$$

$$U_\theta = U_\infty \sin \theta \quad (1.2)$$

$$U_\phi = 0 \quad (1.3)$$

Stream line dari kecepatan dituliskan (John, 2010)

$$U = \nabla \phi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} e_r + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} e_\theta + 0 e_\phi \quad (1.4)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (1.1)-(1.3) ke (1.4) diperoleh :

$$U_r = -U_\infty \cos \theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} = - \left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3} \right) \cos \theta \quad (1.5)$$

$$U_\theta = U_\infty \sin \theta + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} = \left(U_\infty + \frac{\mu}{4\pi r^3} \right) \sin \theta \quad (1.6)$$

$$U_\Phi = 0 \quad (1.7)$$

Untuk menentukan titik stagnasi pada aliran fluida, diberikan $U_r = U_\theta = 0$ ada Persamaan. Pada Persamaan (1.6) $U_\theta = 0$ diberikan $\sin \theta = 0$, dimana titik stagnasi terletak di $\theta = 0$ dan π . Pada Persamaan (1.5) dengan $U_r = 0$ dapat diperoleh:

$$U_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3} = 0 \quad (1.8)$$

dengan $r = R$ merupakan koordinat jari-jari dari titik stagnasi. Untuk menyelesaikan Persamaan (1.8) maka diperoleh nilai R

$$R = \left(\frac{\mu}{2\pi U_\infty} \right)^{1/3} \quad (1.9)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (1.9) ke Persamaan (1.5) diperoleh :

$$\begin{aligned} U_r &= - \left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3} \right) \cos \theta \\ \Leftrightarrow U_r &= - \left\{ U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{2\pi U_\infty}{\mu} \right) \right\} \cos \theta \\ \Leftrightarrow U_r &= -(U_\infty - U_\infty) \cos \theta \\ \Leftrightarrow U_r &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dari Persamaan (1.10) diperoleh bahwa $U_r = 0$ saat $r = R$ untuk setiap nilai θ dan Φ . Daerah kecepatan yang diberikan pada Persamaan (1.5)-(1.7) adalah aliran *incompressible* yang melalui bola berjari-jari R . Pada permukaan bola dengan $r = R$, kecepatan tangensial didefinisikan pada Persamaan (1.6) sebagai berikut:

$$U_\theta = \left(U_\infty + \frac{\mu}{4\pi r^3} \right) \sin \theta \quad (1.11)$$

dari Persamaan (1.9) yaitu

$$\mu = 2\pi R^3 U_\infty \quad (1.12)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (1.12) ke Persamaan (1.11) maka diperoleh :

$$U_\theta = \left(U_\infty + \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi R^3 U_\infty}{R^3} \right) \sin \theta$$

Atau dapat dituliskan

$$U_\theta = \frac{3}{2} U_\infty \sin \theta \quad (1.13)$$

Lampiran 2 : Perhitungan Persamaan Similaritas

Dari transformasi Persamaan tak berdimensi, selanjutnya dilakukan transformasi ke dalam bentuk Persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir, yaitu :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

dengan variabel similaritas yaitu

Small time

$$\psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \quad W = s(x, \eta, t) \quad \eta = \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}}$$

Large time

$$\psi = u_e(x) r(x) F(x, Y, t) \quad W = S(x, Y, t) \quad Y = y$$

Sehingga diperoleh

1. Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-r \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$$

2. Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left[(1-\chi) + \left(\chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} M(u - u_e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right) = \\ & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left[(1-\chi) + \left(\chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)}{\partial y^2} - \frac{25}{16} M \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - u_e \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} =$$

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi \rho_{ND})]} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} + \frac{25}{16} M \left(u_e - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right)$$

dengan

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{t^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} y t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{t}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \right) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

$$= t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

$$= u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \left(t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \right)}{\partial x}$$

$$= t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial (u_e(x) r(x) f(x, \eta, t))}{\partial x}$$

$$= t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial (u_e(x) r(x))}{\partial x} f(x, \eta, t) + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x}$$

$$= t^{\frac{1}{2}} f(x, \eta, t) \left(\frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) + \frac{\partial r(x)}{\partial x} u_e(x) \right) + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x}$$

$$= r(x) t^{\frac{1}{2}} f(x, \eta, t) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + u_e(x) t^{\frac{1}{2}} f(x, \eta, t) \frac{\partial r(x)}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{t} u_e(x) r(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial u_e(x) r(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \\
&= \left(\frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) + \frac{\partial r(x)}{\partial x} u_e(x) \right) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \\
&= r(x) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \\
&= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \\
&= -\frac{u_e(x) r(x) \eta}{t} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta}
\end{aligned}$$

Selanjutnya $u_e(x) = u_e$; $r(x) = r$; $f(x, \eta, t) = f$, persamaan similaritas untuk persamaan momentum yaitu menjadi:

Ruas kiri:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \\
& \frac{1}{r} \left(-\frac{u_e r}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) + \frac{1}{r^2} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \\
& - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dx} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(t^{\frac{1}{2}} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\
& \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
& = -\frac{u_e}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + \frac{u_e}{r} \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) - \\
& \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} u_e^2 r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{u_e}{r t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \left(t^{1/2} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} + t^{1/2} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\
& = -\frac{u_e}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \\
& \frac{1}{r^3} \frac{d}{dx} u_e^2 r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
& = -\frac{u_e}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \\
& \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e - \frac{u_e^2}{r} f \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left[(1-\chi) + \left(\chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{25}{16} M \left(u_e - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left[(1-\chi) + \left(\chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] \frac{1}{r} \left(\frac{1}{t} u_e r \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) \\
&\quad + \frac{25}{16} M \left(u_e - \left(\frac{1}{r} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) \right) \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left[(1-\chi) + \left(\chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \frac{25}{16} M \left(u_e - u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left[(1-\chi) + \left(\chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \frac{25}{16} M u_e \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan Ruas kanan dan dibagi $\frac{u_e}{t}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left[(1-\chi) + \left(\chi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] \\
&\quad + \frac{25}{16} M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \\
&t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} f \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
&\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Untuk selanjutnya dapat dituliskan bahwa $s(x, \eta, t) = s$ sehingga persamaan similaritas untuk energi yaitu

$$\begin{aligned}
-\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{r} \left(r t^{\frac{1}{2}} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e t^{\frac{1}{2}} f \frac{\partial r}{\partial x} t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s}{\partial \eta} &= \frac{1}{t} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\
-\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \left(f \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{1}{r} f \frac{\partial r}{\partial x} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial s}{\partial \eta} &= \frac{1}{t} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $Pr t$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
-Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t \frac{\partial s}{\partial t} + Pr t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - Pr t f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - Pr t u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - Pr t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \\
= \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{Pr \eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \\
= Pr t \left[\frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right]
\end{aligned}$$

Lampiran 3 : Penurunan Kondisi Awal

Persamaan yang digunakan untuk menentukan kondisi awal yaitu

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f'' + \frac{3}{2} t \left[1 - (f')^2 + ff'' \right] + \frac{25}{16} Mt (1-f') \\ = t \frac{f''}{\partial t}$$

$$\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{[(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)][(1-\chi) + \chi\rho_{ND}]} s'' + Pr \frac{\eta}{2} s' + Prt f \frac{3}{2} s' = Prt \frac{\partial s}{\partial t}$$

dengan mensubstitusikan $t = 0$ maka diperoleh persamaan

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f'' = 0 \\ \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{[(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)][(1-\chi) + \chi\rho_{ND}]} s'' + \frac{Pr\eta}{2} s' = 0$$

untuk mendapatkan f digunakan persamaan

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] f''' + \frac{\eta}{2} f'' = 0$$

dengan menggunakan pemisalan $h = f''$ sehingga persamaannya menjadi

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] h' + \frac{\eta}{2} h = 0$$

dengan $h' = \frac{dh}{d\eta}$ maka persamaan $h' + \frac{\eta}{2} h = 0$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] dh + \frac{\eta}{2} h d\eta = 0$$

kedua ruas dibagi dengan h sehingga diperoleh

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right] \frac{1}{h} dh + \frac{\eta}{2} d\eta = 0$$

kedua ruas diintegrasikan diperoleh

$$\ln h + \frac{\eta^2}{4} = c_1$$

$$\ln h = \frac{-\frac{\eta^2}{4} + c_1}{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right]} \\ h = e^{\frac{-\frac{\eta^2}{4} + c_1}{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right]}}$$

$$f'' = e^{\left[\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right]} e^{\left[\frac{-\frac{\eta^2}{4}+c_1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right]}$$

$$f' = e^{\left[\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right]} \int e^{-\frac{\eta^2}{4\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right]}} d\eta$$

dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi error (erf) yaitu

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \operatorname{erf}(\sqrt{c}x)$$

maka diperoleh

$$f' = e^{\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]}} \sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2} \sqrt{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right]} \right) + c_2$$

dengan menggunakan kondisi batas

$t \geq 0$: $f = f' = 0, s = 1$ pada saat $\eta = 0$

$f' = 1, s = 0$ pada saat $\eta \rightarrow \infty$

akan ditentukan nilai e^{c_1} dan c_2 yaitu untuk saat $\eta = 0$

$$0 = e^{\frac{c_1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]}} \sqrt{\pi(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \operatorname{erf}(0) + c_2$$

Maka $c_2 = 0$

saat $\eta \rightarrow \infty$ maka diperoleh

$$f' = \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2} \sqrt{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi)+(\chi\rho_{ND})]} \right]} \right)$$

$$\begin{aligned}
& f \\
& \left(\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right]}} \right) \\
= & \left(\frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2} \sqrt{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right]} \right) \eta \sqrt{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right]} \right) \\
& + e^{-\frac{\eta^2}{4 \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right]}} \\
& + c_3
\end{aligned}$$

Substitusi nilai e^{c_1} dan c_2 ke f' dan nilai c_3 dihitung dengan menggunakan kondisi batas $f = 0$ saat $\eta = 0$ yaitu

$$c_3 = -2 \sqrt{\left[\frac{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]1}{\pi} \right]}$$

Substitusi c_3 ke f sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& f \\
& \left(\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right]}} \right) \\
= & \left(\frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2} \sqrt{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right]} \right) \eta \sqrt{\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right]} \right) \\
& + e^{-\frac{\eta^2}{4 \left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]} \right]}} \\
& - 2 \sqrt{\left[\frac{(1-\chi)^{2.5}[(1-\chi) + (\chi\rho_{ND})]1}{\pi} \right]}
\end{aligned}$$

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Pingkan Aevi Mariosty Palyama lahir di Ambon, Maluku, pada tanggal 22 Desember 1992 dan merupakan anak pertama dari dua bersaudara pasangan Laurens Makatipu dan Rienel Palyama. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Dharma Wanita Bula, Seram Bagian Timur, Maluku Tengah, melanjutkan pendidikan SD pada SD Negeri 1 Rumahtiga Ambon, lulus pada tahun 2004 dilanjutkan ke pendidikan SMP Negeri 7 Ambon lulus pada tahun 2007, dan melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 3 Kelas Jauh di Passo Ambon (sekarang berubah nama menjadi SMA Negeri 14 Ambon). Setelah lulus dari SMA pada tahun 2010, diterima sebagai mahasiswa angkatan 2010, penulis melanjutkan S1 di Jurusan Pendidikan MIPA, Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Pattimura Ambon. Setelah lulus pada tahun 2015, penulis melanjutkan pendidikan S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2016. Diterima sebagai mahasiswa S2 angkatan 2016 genap. Informasi, kritik dan saran atau membutuhkan informasi yang berhubungan dengan Tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui email Ingka.palyama@gmail.com atau pingkanamp@yahoo.co.id